

Riemannsche Flächen

Jakob Scholbach

Vorlesungnotizen Wintersemester 2017/18

Zusammenfassung

Diese Vorlesung wurde im WS 2017/18 gehalten (28 x 90 min). Der Beweis von Theorem 4.0.1 ist im nicht-kompakten Fall nicht vollständig (die Existenz von “genügend” meromorphen Funktionen fehlt noch). Der Beweis der Aussagen über Čech-Kohomologie wurde i.d.R. weggelassen. Der Beweis von Serre-Dualität wurde aus Zeitgründen weggelassen. Ebenfalls nicht bewiesen wurde der Satz von Schwartz über kompakte Operatoren.

Inhaltsverzeichnis

1	Einstimmung	7
1.1	Übungsaufgaben	11
2	Grundbegriffe der Funktionentheorie	13
2.1	Holomorphe Funktionen	13
2.2	Homotopieinvarianz von Wegintegralen holomorpher Funktionen	18
2.3	Grundlegende Eigenschaften holomorpher Funktionen	21
2.4	Folgen holomorpher Funktionen	23
2.5	Meromorphe Funktionen	24
2.5.1	Elliptische Funktionen	27
2.5.2	Berechnung von uneigentlichen Integralen	30
2.6	Der Riemannsche Abbildungssatz	31
2.7	Übungsaufgaben	33
3	Riemannsche Flächen	37
3.1	Definitionen und erste Eigenschaften	37
3.2	Übungsaufgaben	41
4	Überlagerungstheorie	43
4.1	Topologie von Überlagerungen	45
4.2	Überlagerungen Riemannscher Flächen	51
4.3	Übungsaufgaben	58
5	Garben und Garbenkohomologie	61
5.1	Definitionen	61
5.2	Halme und exakte Sequenzen von Garben	62
5.3	Čech-Kohomologie	64
5.4	Übungsaufgaben	67
6	Differentialformen	69
6.1	Differentialformen auf \mathbb{C}	69
6.2	Integration von Differentialformen und der Satz von Stokes	72
6.3	Das Lemma von Dolbeault	73
6.4	Berechnung einiger Kohomologiegruppen	74
6.5	Übungsaufgaben	76
7	Der Satz von Riemann-Roch	77
7.1	Divisoren	77
7.2	Der Satz von Riemann-Roch und erste Folgerungen	79
7.3	Beweis des Satzes von Riemann-Roch	80
7.4	Übungsaufgaben	82
8	Serre-Dualität	85
8.1	Differentialformen auf Riemannschen Flächen	85
8.1.1	Pullback von Differentialformen	86
8.1.2	Integration von Differentialformen	87
8.1.3	Meromorphe Differentialformen	88
8.2	Der Satz von Riemann-Hurwitz	90
8.3	Übungsaufgaben	92

Literaturverzeichnis

- [Bre97] Glen E. Bredon. *Sheaf theory*, volume 170 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- [FB06] Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Funktionentheorie 1*. Berlin: Springer, 4th corrected and expanded ed. edition, 2006.
- [For77] Otto Forster. *Riemannsche Flächen*. 1977.
- [God73] Roger Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris, 1973. Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252.
- [Ive86] Birger Iversen. *Cohomology of sheaves*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [May99] J. P. May. *A concise course in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [Nar92] Raghavan Narasimhan. *Compact Riemann surfaces*. Basel: Birkhäuser, 1992.
- [Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis. 3rd ed.* New York, NY: McGraw-Hill, 3rd ed. edition, 1987.
- [Ser] Jean-Pierre Serre. Deux théorèmes sur les applications complètement continues. *Séminaire Henri Cartan*, pages 1–7. Volume 6 (1953-1954) , Talk no. 16.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Why64] Gordon T. Whyburn. *Topological analysis*. (Princeton Mathematical Series. 23.) Revised. ed. Princeton, N. J.: Princeton University Press, XII, 125 p. (1964)., 1964.

Kapitel 1

Einstimmung

Dieses erste Kapitel ist eine Einstimmung auf einige Ideen der Vorlesung. Abgesehen von der Definition holomorpher Funktionen werden alle Begriffe und Sätze später noch einmal ausführlicher erläutert bzw. präzisiert.

Ähnlich wie die lokale Theorie reeller Mannigfaltigkeiten auf reell differenzierbaren Funktionen basiert, und wie die Theorie algebraischer Varietäten und Schemata lokal durch polynomiale Funktionen beschrieben wird, basiert die Theorie der Riemannschen Flächen auf einer Klasse von Funktionen, die wir nun einführen:

Definition 1.0.1. Sei $U \subset \mathbf{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ heißt *holomorph* oder auch *komplex differenzierbar* in $z_0 \in \mathbf{C}$, wenn der Limes

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. (D.h. für jede Folge z_n mit $z_n \rightarrow z_0$ existiert der Limes der Folge $\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}$ und für alle solche Folgen sind deren Limites gleich.) f heißt holomorph, wenn sie in allen Punkten $z_0 \in U$ holomorph ist. Die Menge der holomorphen Funktionen wird mit $\mathcal{O}(U)$ bezeichnet.

Beispiel 1.0.2. $f(z) = z$ ist holomorph. Hingegen sind $f(z) = \bar{z}$, $f(z) = \Re(z)$, $f(z) = \Im(z)$ nicht holomorph.

Obwohl die Definition holomorpher Funktionen wortwörtlich die gleiche ist wie die Definition (reeller) differenzierbarer Funktionen, ergeben sich dennoch gravierende Unterschiede zwischen reeller und komplexer Analysis, wie wir an folgendem Theorem sehen:

Theorem 1.0.3. Sei $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ eine Funktion und $z_0 \in U$ beliebig. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist holomorph
- (ii) f ist unendlich oft komplex differenzierbar ($f^{(\nu)}$ sei die ν -te Ableitung)
- (iii) f ist analytisch, d.h. es gilt für beliebiges $z_0 \in U$ und beliebiges $R > 0$ so dass $\overline{U_R(z_0)} \subset U$ und beliebiges $z \in U_R(z_0)$, dass f durch eine auf $U_R(z_0)$ absolut konvergente Reihe gegeben ist:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (z - z_0)^{\nu}.$$

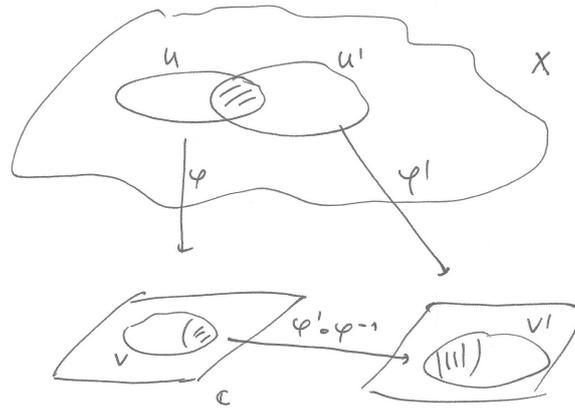
(Man kann daraus folgern, dass $a_{\nu} = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$.)

Bemerkung 1.0.4. Die Implikationen (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i) in Theorem 1.0.3 sind eine Umformulierung von Lemma 2.1.3 (und gelten auch für reelle Potenzreihen analog). Eines unserer Hauptziele im folgenden Kapitel wird der Beweis der Richtung (i) \Rightarrow (iii) sein. Diese Implikation beruht entscheidend auf der Annahme, dass f holomorph ist, wie man am Beispiel von Übungsaufgabe 2.7.3 sieht.

Definition 1.0.5. Eine *Riemannsche Fläche* X ist ein zusammenhängender topologischer Raum, so dass es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \ni x$ gibt zusammen mit einem Homöomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbf{C}$ gibt. (Man nennt φ auch eine *Karte*.) Für eine weitere solche Karte $U' \ni x, \varphi' : U' \rightarrow V'$ muss die sog. *Übergangsabbildung*

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$$

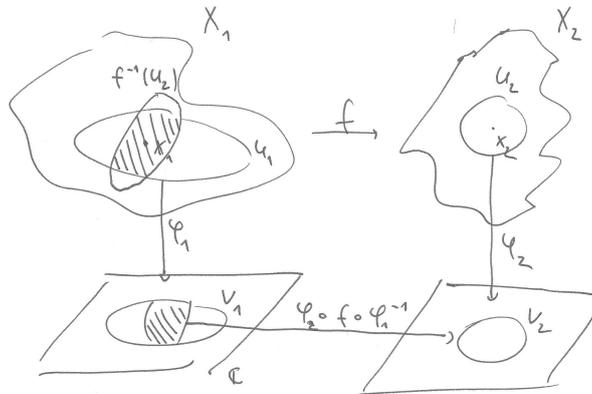
eine holomorphe Abbildung sein.



Eine Abbildung zwischen Riemannschen Flächen $f : X_1 \rightarrow X_2$ ist eine stetige Abbildung so, dass es für jedes $x_1 \in X_1$ und $x_2 := f(x_1)$ eine Karte $x_2 \in U_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_2$ und $x_1 \in U_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_1$ gibt, so dass die Abbildung

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} |_{\varphi_1(f^{-1}(U_2) \cap U_1)} : \varphi_1(f^{-1}(U_2) \cap U_1) \rightarrow U_2$$

holomorph ist.



Beispiel 1.0.6. \mathbf{C} und allgemeiner jede offene zusammenhängende Teilmenge $U \subset \mathbf{C}$ ist eine Riemannsche Fläche.

Beispiel 1.0.7. Die projektive Gerade \mathbf{P}^1 ist

$$U_1 \sqcup U_2 / \sim,$$

wobei $U_1 = U_2 = \mathbf{C}$ und $U_1 \ni z \neq 0$ mit $1/z \in U_2$ identifiziert wird. Die natürliche Abbildung $\mathbf{C} = U_1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ in die 1. Kopie ist offenbar injektiv und identifiziert \mathbf{C} mit einer offenen Teilmenge von \mathbf{P}^1 . Das Komplement besteht aus einem Punkt, der mit ∞ bezeichnet wird. Als Menge gilt also $\mathbf{P}^1 = \mathbf{C} \sqcup \{\infty\}$. \mathbf{P}^1 ist eine Riemannsche Fläche.

Man kann leicht einen Homöomorphismus $\mathbf{P}^1 \rightarrow S^2$ angeben (Übungsaufgabe 1.1.1), daher wird \mathbf{P}^1 auch als *Riemann-Sphäre* bezeichnet.

Beispiel 1.0.8. Sei $\tau \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Betrachte die Untergruppe

$$\Lambda := \mathbf{Z} \oplus \tau \mathbf{Z}.$$

Der Quotient $X := \mathbf{C}/\Lambda$ ist ebenfalls eine Riemannsche Fläche, eine sog. *elliptische Kurve*: die Projektion $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\Lambda$ ist, lokal um jeden Punkt $z \in \mathbf{C}$ eine Bijektion, dies definiert eine eindeutige Topologie auf X , so dass π stetig ist. Die Übergangsabbildungen sind in diesem Fall gegeben durch $z \mapsto z$.

Definition 1.0.9. Eine *meromorphe Funktion* auf einer Riemannschen Fläche X ist eine holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$, die nicht konstant ∞ ist.

Satz 1.0.10. Die meromorphen Funktionen auf X bilden einen Körper, den sog. *Funktionenkörper* von X .

Beweis. Man zeigt, dass meromorphe Funktionen lokal von der Form f/g sind, wobei f, g holomorph und $g \neq 0$. Damit ist der Satz eine Folgerung aus dem Identitätssatz, welcher insbesondere besagt, dass eine holomorphe Funktion f auf einem zusammenhängenden Raum genau dann 0 ist, wenn f in einer Umgebung eines beliebigen Punktes verschwindet. \square

Beispiel 1.0.11. Wie wir später sehen werden, ist der Funktionenkörper von \mathbf{P}^1 gerade $\mathbf{C}(z)$, d.h. jede meromorphe Funktion auf \mathbf{P}^1 ist rational, d.h. von der Form p/q mit $p, q \in \mathbf{C}[z]$. Algebraische Begriffe, wie etwa der der Galois-Erweiterung (hier von $\mathbf{C}(z)$) haben geometrische Analoga.

Satz 1.0.12. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, z.B. $X = \mathbf{P}^1$, $X = \mathbf{C}/\Lambda$, jedoch nicht $X = \mathbf{C}$ oder \mathbf{C}^\times . Jede holomorphe Funktion $f : X \rightarrow \mathbf{C}$ ist dann konstant.

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache (Folgerung 2.3.7), dass jede holomorphe Funktion $g : U \rightarrow \mathbf{C}$ ($U \subset \mathbf{C}$ offen) entweder konstant ist oder offen ist, d.h. Bilder offener Mengen sind wieder offen. Mithilfe dessen: wäre $f \neq \text{const}$, so wäre $f(X) \subset \mathbf{C}$ offen, andererseits auch als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung kompakt, d.h. abgeschlossen und beschränkt. Dies ist nicht möglich. \square

Holomorphe Funktionen $f : X \rightarrow \mathbf{C}$ sagen also nichts über X aus, falls X kompakt ist. Dies ändert sich, wenn wir Funktionen betrachten, die (auf kontrollierte Weise) in einigen Punkten gegen ∞ divergieren.

Als Illustration betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1, z \mapsto z^n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

(diese ist wohldefiniert, da $\mathbf{C}^\times \ni z \sim 1/z \mapsto z^n \sim 1/z^n$). Für $n = \pm 1$ ist die Abbildung bijektiv. Allgemeiner, für $n \neq 0$ hat jeder Punkt $w \in \mathbf{P}^1$ genau n Urbilder, wenn wir sie mit Vielfachheiten zählen. Für fast alle w (d.h. alle bis auf endlich viele) hat $f^{-1}(w)$ genau n Elemente und allgemeiner ist $f^{-1}(W)$ homöomorph zu $\sqcup_{i=1}^n W$ für eine hinreichend kleine Umgebung $W \ni w$. In einigen Punkten "kollabieren" die Urbilder, diese heißen *Verzweigungspunkte*. Für obiges f sind 0 und ∞ genau die Verzweigungspunkte.

Begriffe der algebraischen Zahlentheorie, wie z.B. der der Verzweigung, haben ihren Ursprung in der Theorie Riemannscher Flächen: eine kompakte Riemannsche Fläche entspricht in dieser Analogie einem Zahlkörper K (bzw. dessen Ring \mathcal{O}_K der ganzen Zahlen).

Definition 1.0.13. Sei X eine Riemannsche Fläche und D ein *Divisor*, d.h. eine formale Linearkombination

$$D = n_1 z_1 + \dots + n_k z_k,$$

mit $n_i \in \mathbf{Z}$ und $z_i \in X$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}_D(X)$ die meromorphen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ die außerhalb der z_i holomorph sind und außerdem folgende Bedingung erfüllen:

$$\text{ord}_{z_i} f \geq -n_i.$$

D.h. falls $n_i \geq 0$ muss f in z_i mindestens eine Nullstelle (n_i -ter Ordnung) haben. Falls $n_i < 0$ darf f in z_i einen Pol von höchstens (n_i -ter Ordnung) haben. Letzteres bedeutet, dass $1/f$ (in einer Umgebung von z_i) eine Nullstelle mindestens ($-n_i$ -ter Ordnung) hat.

Beispiel 1.0.14. Für $X = \mathbf{P}^1$ und $D = n \cdot \infty$ ist

$$\mathcal{O}_D(X) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \mathbf{C} & n = 0 \\ \bigoplus_{i=0}^n \mathbf{C}z^i & n > 0 \end{cases}$$

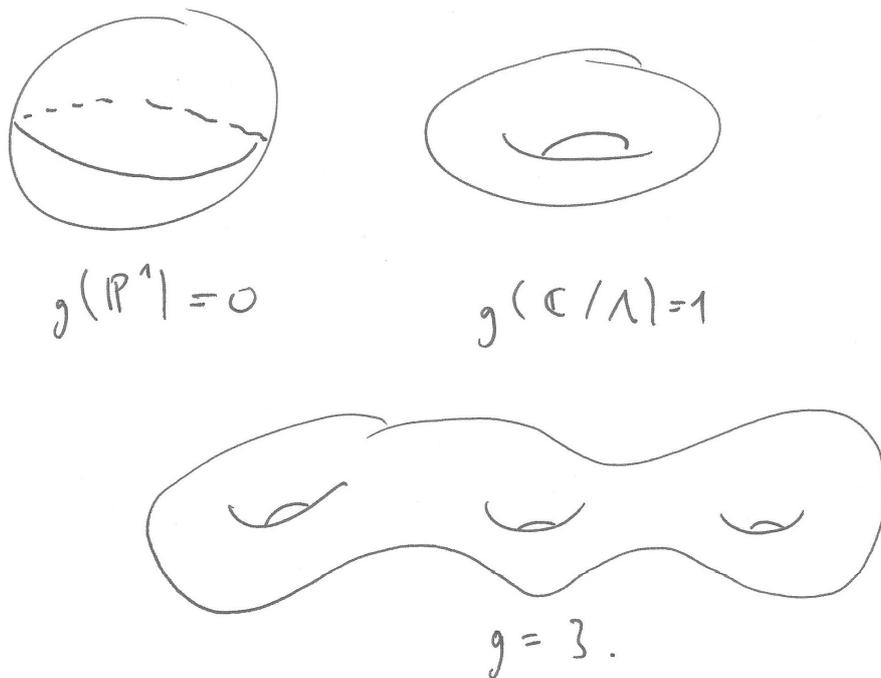
Im ersten Fall gibt es keine solchen Funktionen, da f dann holomorph, also konstant, aber auch in ∞ verschwindet. Für den dritten Fall haben wir gesehen, dass $1, z, z^2, \dots, z^n$ auf $\mathbf{C} \subset \mathbf{P}^1$ meromorph sind und in ∞ einen Pol maximal n -ter Ordnung haben. Die umgekehrte Tatsache erfordert ähnliche Argumente wie sie auch für Beispiel 1.0.11 gebraucht werden.

Insbesondere stellen wir fest:

$$h^0(D) := \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_D(\mathbf{P}^1) = \deg D + 1.$$

(Hierbei ist $\deg D = \sum n_i$ für D wie oben der *Grad* von D .)

Definition 1.0.15. Das Geschlecht $g(X) \in \mathbf{Z}^{\geq 0}$ einer kompakten Riemannschen Fläche X lässt sich anschaulich "definieren" als "Anzahl der Henkel". Beispielsweise ist $g(\mathbf{P}^1) = 0$ und $g(\mathbf{C}/\Lambda) = 1$ (Beispiel 1.0.8).



Eine präzise Definition erfordert mehr Techniken der algebraischen Topologie (sog. singuläre Homologie) oder der Funktionentheorie (Kohomologiegruppen).

Das Geschlecht ist eine grobe Invariante kompakter Riemannscher Flächen: zwei kompakte Riemannsche Flächen X, Y sind *homöomorph* genau dann, wenn gilt:

$$g(X) = g(Y).$$

Homöomorph zu sein ist eine wesentlich schwächere Bedingung als dass sie isomorph sind, d.h. dass es holomorphe Abbildungen

$$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$$

gibt mit $f \circ g = \text{id}_Y, g \circ f = \text{id}_X$. Die Isomorphieklassen (ggf. kompakter) Riemannscher Flächen sind daher weitaus reichhaltiger als $\{0, 1, \dots\}$. Beispielsweise sind die elliptischen Kurven $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$ und $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau'\mathbb{Z})$ genau dann isomorph, wenn

$$\tau = A\tau',$$

$A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ (jedoch für beliebige τ, τ' homöomorph).

Theorem 1.0.16. (Satz von Riemann-Roch) *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann gilt*

$$h^0(D) - h^1(D) = \deg D + 1 - g.$$

Hierbei ist $h^0(D) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D(X)$. Weiter ist $h^1(D)$ ein Korrekturterm. Wir benötigen einige Vorarbeiten, um ihn zu definieren und auch um zu zeigen, dass $h^0(D)$ und $h^1(D)$ endlich sind. Für $\deg D \gg 0$ (in Abhängigkeit von X) ist aber $h^1(D) = 0$. Die Zahl $g = g(X)$ ist das sog. Geschlecht von X .

Der Satz von Riemann-Roch ist ein Eckpfeiler der Theorie kompakter Riemannscher Flächen und kann auch auf höher-dimensionale Objekte verallgemeinert werden. Eine Anwendung: sei $X = \mathbb{C}/\Lambda, \Lambda = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}, \tau \notin \mathbb{Z}$. Die *Weierstraßsche \wp -Funktion* ist definiert als

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

Man prüft, dass die Reihe für $z \notin \Lambda$ absolut konvergiert und damit nach Theorem 1.0.3 eine meromorphe Funktion $\wp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ definiert. Man zeigt außerdem $\wp(z + \lambda) = \wp(z)$ und auch ihre Ableitung $\wp'(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{-2}{(z-\lambda)^3}$ erfüllt $\wp'(z + \lambda) = \wp'(z)$. Beide Funktionen sind also meromorphe Funktionen $\wp, \wp' : X \rightarrow \mathbb{C}$. Genauer hat $\wp(z)$ in $P := 0$ einen Pol 2. Ordnung, d.h. $\wp \in \mathcal{O}_{2P}(X)$ und $\wp' \in \mathcal{O}_{3P}(X)$. Das Geschlecht von X ist 1 (anschaulich klar mit der topologischen Charakterisierung von $g(X)$). In $\mathcal{O}_{3P}(X)$ sind folgende Funktionen enthalten (in Klammern die Polordnung bei P):

$$1 \ (0), \wp \ (2), \wp' \ (3), \wp^2 \ (4), \wp\wp' \ (5), \wp^3 \ (6), \wp'^2 \ (6).$$

Im Satz von Riemann-Roch gilt $h^1(nP) = 0$ für $n > 0$, also

$$h^0(6P) = 6,$$

d.h. es gibt eine \mathbf{C} -Linearkombination zwischen den obigen Funktionen, also mit anderen Worten eine *polynomiale Relation* zwischen \wp und \wp' ! Auf diese Weise wird der rein analytische Begriff einer kompakten Riemannschen Fläche (in diesem Fall der elliptischen Kurve) mit einer algebraischen Gleichung in Verbindung gebracht.

1.1 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1.1.1. Konstruiere einen Homöomorphismus

$$\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow S^2.$$

Kapitel 2

Grundbegriffe der Funktionentheorie

2.1 Holomorphe Funktionen

Definition 2.1.1. Eine Teilmenge $X \subset \mathbf{C}$ (oder allgemeiner ein topologischer Raum X) heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte $x, y \in X$ einen *stetigen* Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Eine offene wegzusammenhängende Teilmenge $M \subset \mathbf{C}$ heißt *Gebiet*.

Notation 2.1.2. Falls nichts Gegenteiliges ausgesagt wird, sei im folgenden

$$U \subset \mathbf{C}$$

stets offen und

$$G \subset \mathbf{C}$$

ein Gebiet.

Wie in der reellen Analysis beweist man:

Lemma 2.1.3. Für $f, g \in \mathcal{O}(U)$ sind auch $f + g$, fg holomorph. Also bildet $\mathcal{O}(U)$ eine (kommutative) \mathbf{C} -Algebra. Außerdem ist f/g holomorph, falls $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ ist.

Sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$, mit $a_{\nu} \in \mathbf{C}$, $z_0 \in \mathbf{C}$. Wir nehmen an, dass ihr Konvergenzradius $r > 0$ ist (i.A. $0 \leq r \leq \infty$). Dann ist

$$f : U_r(z_0) \rightarrow \mathbf{C}, f(z) = \sum a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$$

eine holomorphe Funktion mit $f'(z) = \sum a_{\nu}\nu(z - z_0)^{\nu-1}$.

Beispiel 2.1.4. Die *Exponentialfunktion* ist definiert durch die Reihe $\exp(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!}$.

Aus der Grundvorlesung ist folgendes bekannt:

1. Diese Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbf{C}$ absolut. Sie definiert demnach eine holomorphe Funktion $\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$.
2. $\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$ ist ein Gruppenhomomorphismus ist (insbes. $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$).
3. Da jede komplexe Zahl als $z = r \exp(i\varphi)$ mit $r \in \mathbf{R}^{\geq 0}$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ geschrieben werden kann, ist $\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$ surjektiv.
4. Es gilt

$$\ker \exp = \{z \in \mathbf{C}, \exp(z) = 1\} = 2\pi i\mathbf{Z}.$$

Die Inklusion \supset ist klar (i. W. aus der Definition von π). Umgekehrt, für $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$ und $1 = \exp(z) = \underbrace{\exp(x)}_{\in \mathbf{R}^{>0}} \underbrace{\exp(iy)}_{|-|=1}$ folgt $\exp x = 1$ also $x = 0$ und $iy = 2\pi ik$ mit $k \in \mathbf{Z}$.

5. Insgesamt erhalten wir einen (komplex differenzierbaren) Gruppenisomorphismus $\exp : \mathbf{C}/2\pi i\mathbf{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbf{C}^{\times}$.

Wir werden später eine allgemeinere Klasse von Funktionen einführen, die sog. meromorphen Funktionen. Meromorphe Funktionen auf einem Gebiet bilden, im Gegensatz zu holomorphen Funktionen, einen Körper.

Eine weitere wichtige Charakterisierung holomorpher Funktionen beruht auf Kurvenintegralen. Diese sind auch für Anwendungen der Funktionentheorie in (reeller) Analysis von Bedeutung.

Definition 2.1.5. Eine *stückweise C^1 -Kurve* ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ so dass es eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ gibt, so dass $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ C^1 (d.h. stetig differenzierbar) ist.

Für eine stückweise C^1 -Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ und eine stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ definiere

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Theorem 2.1.6. Sei $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) f ist holomorph

(ii) für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset U$ gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

Die Implikation (i) \Rightarrow (ii) heißt auch *Lemma von Goursat*, die Umkehrung ist der *Satz von Morera*.

Zur Vorbereitung des Beweises von (i) \Rightarrow (ii) benötigen wir einige Tatsachen über das Kurvenintegral.

Definition 2.1.7. Für zwei Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ ist ihre *Komposition von Wegen* definiert durch

$$(\gamma_1 \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Das Inverse von γ_1 ist

$$(\gamma_1^{-1})(t) := \gamma_1(1 - t).$$

Wir werden später (Übungsaufgabe 2.7.8) die sog. Fundamentalgruppe $\pi_1(U)$ einführen, die aus gewissen Äquivalenzklassen (sog. Homotopieklassen) von geschlossenen Wegen besteht, so dass obige Operationen gerade die Gruppenoperationen werden. Zunächst handelt es sich nur um eine Notation.

Beobachtung 2.1.8.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^{-1}} f(z) dz &= - \int_{\gamma} f(z) dz, \\ \int_{\gamma_1 \gamma_2} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz. \end{aligned}$$

Für spätere Zwecke notieren wir die Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq l(\gamma) \max_{t \in [0, 1]} |f(\gamma(t))|,$$

wobei $l(\gamma) := \int_0^1 |\gamma'(t)| dt$ die *Länge* von γ ist.

Wie in der reellen Analysis definieren wir:

Definition 2.1.9. Sei $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ stetig. Eine holomorphe Funktion $F : U \rightarrow \mathbf{C}$ heißt *Stammfunktion* von f , wenn

$$F' = f$$

gilt.

Aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung leiten wir nun folgendes ab:

Lemma 2.1.10. Falls (mit obiger Notation) F eine Stammfunktion von f ist und γ ein Weg in U (stückweise C^1) ist, so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

Beweis. Wir können annehmen, dass γ C^1 ist. Wegen $\frac{d(F \circ \gamma)}{dt} = F'(\gamma(t)) \gamma'(t)$ gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} (F \circ \gamma) dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

□

Lemma 2.1.11. *Si $G \subset \mathbf{C}$ konvex, $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ stetig. Es gelte für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$: $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. Dann hat f eine Stammfunktion.*

Beweis. Für $a, b \in G$ sei $\gamma_{a,b} : [0, 1] \rightarrow G$ der Weg $\gamma_{a,b}(t) = (1-t)a + tb$. (Er liegt nach Voraussetzung in G .) Fixiere $a \in G$ und schreibe $\gamma_z := \gamma_{a,z}$. Setze

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta.$$

Für $z_0, z \in G$ liegt das Dreieck Δ mit den Ecken a, z_0, z ganz in G , also gilt

$$\int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)d\zeta + \int_{\gamma_{z_0,z}} f(\zeta)d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta = \int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0,$$

also

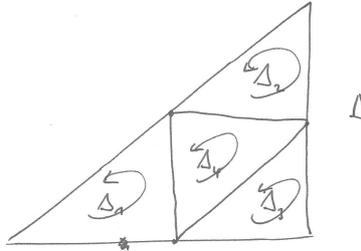
$$F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma_{z_0,z}} f(\zeta)d\zeta = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)(z - z_0)dt,$$

also

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)dt \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \int_0^1 f(z_0)dt = f(z_0),$$

wobei die Konvergenz aus der Stetigkeit von f folgt. Also ist $F'(z_0) = f(z_0)$. □

Lemma von Goursat (Theorem 2.1.6(i) \Rightarrow (ii)). Zerlege Δ hierzu in 4 kleinere Dreiecke $\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^4$:



Es gilt also $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_k^1} f(z)dz$. Sei Δ_1 dasjenige der 4 Dreiecke, so dass $|\int_{\partial\Delta_k^1} f(z)dz|$ maximal ist, dann folgt $|\int_{\partial\Delta} f(z)dz| \leq 4|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz|$. Wir iterieren dieses Argument und erhalten Dreiecke $\dots \subset \Delta_n \subset \Delta_{n-1} \subset \dots$ mit $|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz| \leq 4^n |\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz|$. Da die Δ_n kompakt sind, gibt es ein $z_0 \in \Delta$ so dass $\bigcap_n \Delta_n = \{z_0\}$.

Da f in z_0 komplex differenzierbar ist, gilt

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)(f'(z_0) + A(z)),$$

wobei A eine stetige Funktion ist mit $A(z_0) = 0$. Die Funktion $z \mapsto f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ hat eine Stammfunktion, z.B. $z \mapsto zf(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2}f'(z_0)$. Also folgt aus Lemma 2.1.10, dass

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)dz = 0.$$

Es folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| &= \left| \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)A(z)dz \right| \\ &\leq l(\partial\Delta_n) \max_{z \in \partial\Delta_n} |(z - z_0)A(z)| \\ &\leq l(\partial\Delta_n)^2 \max_{z \in \Delta_n} |A(z)| \end{aligned}$$

Wegen $l(\partial\Delta_n) = 2^{-n}l(\Delta)$ (l ist die Länge) folgt

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq l(\Delta)^2 \max_{z \in \Delta_n} |A(z)|.$$

Da A stetig ist, gibt es $z_n \in \Delta_n$ mit $\max_{z \in \Delta_n} |A(z)| = |A(z_n)|$. Es gilt $z_n \rightarrow z_0$ für $n \rightarrow \infty$. Wir erhalten also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in \Delta_n} |A(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |A(z_n)| = |A(z_0)| = 0,$$

also $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. □

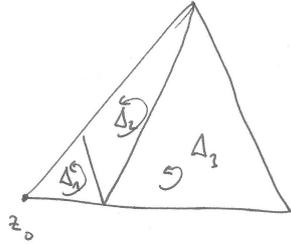
Unser nächstes Ziel ist der Cauchysche Integralsatz, welcher seinerseits für die Tatsache “ f holomorph $\Rightarrow f'$ holomorph” (Theorem 1.0.3(i) \Rightarrow (ii)) gebraucht wird. Hierzu benutzen wir folgende Verschärfung des Lemmas von Goursat.

Lemma 2.1.12. *Sei $z_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ stetig und $f|_{U \setminus \{z_0\}}$ holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset U$*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Bemerkung 2.1.13. Der Riemannsche Hebbarkeitssatz Theorem 2.5.3 besagt, dass f dann bereits auf U holomorph sein muss, sein Beweis beruht aber u.a. auf diesem Lemma.

Beweis. Falls $z_0 \in \Delta$ ein Eckpunkt ist, zerlege Δ wie folgt:



Es gilt also

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \underbrace{\int_{\partial\Delta_2} f(z)dz}_{=0(\text{Goursat})} + \underbrace{\int_{\partial\Delta_3} f(z)dz}_{=0(\text{Goursat})}.$$

Also folgt $|\int_{\partial\Delta} f(z)dz| = |\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz| \leq l(\partial\Delta_1)C$ mit $C := \max_{z \in \Delta} |f(z)| < \infty$ (da f stetig und Δ kompakt). Wähle Δ_1 immer kleiner, daraus folgt die Behauptung in diesem Fall.

Falls z_0 auf einer Randstrecke oder im Innern von Δ liegt, wähle eine Unterteilung von Δ so dass z_0 auf den Eckpunkten der unterteilten Dreiecke liegt, dann folgt die Behauptung aus dem bereits bewiesenen Fall. \square

Direkt aus Lemma 2.1.11 folgt:

Folgerung 2.1.14. *Sei G konvex (und wie immer ein Gebiet), $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ stetig und bis auf einen Punkt holomorph. Dann hat f eine Stammfunktion, insbesondere gilt für jeden geschlossenen (stückweise C^1) Weg γ in G :*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Der folgende Satz ist für das weitere entscheidend, insbesondere zeigt er die überraschende Tatsache dass f schon durch die Werte von $f|_{\partial D}$ bestimmt wird!

Theorem 2.1.15. (Cauchyscher Integralsatz) *Sei $D = U_r(z_0) \subset \bar{D} \subset U \subset \mathbf{C}$ (U wie immer offen), $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph. Dann gilt für alle $z \in D$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Hierbei ist mit $\int_{\partial D}$ die Integration gegen den Uhrzeigersinn, also längs des Weges $[0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$, $t \mapsto z_0 + r \exp(2\pi i t)$ gemeint.

Beweis. Da $\bar{D} \subset U$ kompakt ist, hat es positiven Abstand zu $\mathbf{C} \setminus U$. Es gibt also $\epsilon > 0$, so dass $G = U_{r+\epsilon}(z_0) \subset U$. Fixiere $z \in D$ und definiere $g : G \rightarrow \mathbf{C}$ durch

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z. \end{cases}$$

Dann ist g stetig (klar auf $G \setminus \{z\}$, in z da f komplex differenzierbar ist) und auf $G \setminus \{z\}$ holomorph. Aus Folgerung 2.1.14 folgt dann, da G konvex ist,

$$0 = \int_{\partial D} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta,$$

also

$$f(z) \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Wir berechnen das Integral auf der linken Seite:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} &= 2\pi i \int_0^1 \frac{r \exp(2\pi i t)}{r \exp(2\pi i t) + z_0 - z} dt \\
 &= 2\pi i \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{r} \exp(-2\pi i t)} dt \\
 &= 2\pi i \int_0^1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{r} \right)^{\nu} \exp(-2\pi i \nu t) dt \\
 &\stackrel{1.}{=} 2\pi i \sum_{\nu} \left(\frac{z-z_0}{r} \right)^{\nu} \underbrace{\int_0^1 \exp(-2\pi i \nu t) dt}_{= \begin{cases} 0 & \nu \neq 0 \\ 1 & \nu = 0 \end{cases}} \\
 &= 2\pi i.
 \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Integration und Summation bei 1. ist gestattet, da die geometrische Reihe wegen $\left| \frac{z-z_0}{r} \exp(-2\pi i t) \right| = \left| \frac{z-z_0}{r} \right| < 1$ (wegen $z \in D$) gleichmäßig in t konvergiert. \square

Um eine Aussage auch für die Ableitungen von f zu bekommen, verwenden wir den folgenden Satz. Sein Beweis ist identisch zur analogen Aussage in der reellen Analysis (siehe etwa [FB06, §II.3]):

Satz 2.1.16. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ stückweise C^1 , $U \subset \mathbf{C}$ offen, $g : \gamma([0, 1]) \times U \rightarrow \mathbf{C}$ stetig. Für jedes $\zeta \in \gamma([0, 1])$ sei die Funktion $g(-, z) : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph. Bezeichne $g_z(\zeta, z)$ ihre komplexe Ableitung. Wir nehmen an, dass $g_z : \gamma([0, 1]) \times U \rightarrow \mathbf{C}$ stetig ist. Dann ist die Funktion

$$F : U \rightarrow \mathbf{C}, F(z) := \int_{\gamma} g(\zeta, z) d\zeta$$

holomorph und es gilt $F'(z) = \int_{\gamma} g_z(\zeta, z) d\zeta$.

Folgerung 2.1.17. (dies war die Aussage von Theorem 1.0.3(i) \Rightarrow (ii)) Mit der Notation von Theorem 2.1.15 gilt: f ist beliebig oft komplex differenzierbar und für $z \in D$ gilt

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Außerdem gilt für jedes $0 < \delta \leq r$

$$\max_{|z-z_0| \leq r-\delta} |f^{(n)}(z)| \leq \frac{r n!}{\delta^n} \max_{|\zeta-z_0|=r} |f(\zeta)|. \quad (2.1.18)$$

Beweis. Induktiv wenden wir Satz 2.1.16 mit $g(\zeta, z) = \frac{f^{(n-1)}(\zeta)}{(\zeta - z)^n}$ auf die Cauchy-Integralformel (Theorem 2.1.15) an.

Die zweite Aussage folgt hieraus wegen $l(\partial D) = 2\pi r$ und $\left| \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{\delta^{n+1}}$ ($|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| \geq \delta$). \square

Satz von Morera, Theorem 2.1.6(ii) \Rightarrow (i). Sei $z_0 \in U$ und ϵ so gewählt, dass $U_{\epsilon}(z_0) \subset U$. Nach Lemma 2.1.11 hat f auf $U_{\epsilon}(z_0)$ eine holomorphe Stammfunktion F , also ist f nach Folgerung 2.1.17 ebenfalls holomorph. \square

Schöne Anwendungen der obigen Abschätzung sind der Satz von Liouville sowie auch der Fundamentalsatz der Algebra, siehe Übungsaufgabe 2.7.7.

Satz 2.1.19. (dies zeigt und ergänzt die noch fehlende Implikation Theorem 1.0.3(i) \Rightarrow (iii)) Sei $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph, $z_0 \in U$. Setze $a_{\nu} := \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (z - z_0)^{\nu}$$

für alle $z \in U_R(z_0)$, sofern $\overline{U_R(z_0)} \subset U$ ist. Außerdem gilt

$$a_{\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}} d\zeta.$$

Beweis. Sei $r < R$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right)^{\nu} d\zeta \end{aligned}$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig in $\zeta \in \partial U_R(z_0)$, da $\left| \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{R} \leq \frac{r}{R} < 1$. Wir können also Summation und Integration vertauschen und erhalten

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{\nu}}{2\pi i} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{\nu+1}} d\zeta \stackrel{\text{Folgerung 2.1.17}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(z_0) (z-z_0)^{\nu}.$$

□

Theorem 1.0.3 und Theorem 2.1.6 sind jetzt also vollständig bewiesen.

2.2 Homotopieinvarianz von Wegintegralen holomorpher Funktionen

Bemerkung 2.2.1. Unser bisheriges Wissen über holomorphe Funktionen, Existenz von Stammfunktionen und das Verschwinden von Integralen ist wie folgt: für ein *konvexes Gebiet* G und $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ sind äquivalent:

- (i) f ist holomorph
 - (ii) Es gibt eine (holomorphe) Stammfunktion F , d.h. $F' = f$.
 - (iii) Für jedes Dreieck $\Delta \subset G$ ist $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$.
 - (iv) Für jeden geschlossenen Weg γ (in G) gilt $\int_{\gamma} f dz = 0$.
- (i) \Rightarrow (iv) war Folgerung 2.1.14, (iv) \Rightarrow (iii) ist trivial, (iii) \Rightarrow (ii) war Lemma 2.1.11 und (ii) \Rightarrow (i) war Theorem 1.0.3.

An der Tatsache (Übungsaufgabe 2.7.5)

$$\int_{|z|=1} z^{-1} = 2\pi i \neq 0$$

sehen wir jedoch auch, dass ein Integral einer holomorphen Funktion über einen geschlossenen Weg nicht notwendig 0 sein muss.

Wir werden nun sehen, dass diese Tatsache daher rührt, dass im Gebiet \mathbf{C}^{\times} die Kurve $\exp(2\pi it)$ nicht “zusammengezogen” werden kann. Um diese Idee zu formalisieren, führen wir folgende Definitionen ein.

Definition 2.2.2. Sei X ein topologischer Raum (z.B. eine Teilmenge von \mathbf{C} mit der induzierten Topologie) und $x \in X$ ein Punkt. Zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten ($\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$) heißen *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung (eine sog. *Homotopie*)

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

gibt, so dass gilt:

1. $H(s, t) = \gamma_t(s)$ für alle $s \in [0, 1]$ und $t = 0, t = 1$ (d.h. H interpoliert stetig zwischen γ_0 und γ_1)
2. $H(0, t) = x$, $H(1, t) = y$ für alle t (d.h. der Anfangs- und Endpunkt bleibt unter der Homotopie fest)

Ein *wegzusammenhängender* Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jeder geschlossene Weg γ *nullhomotop* ist, d.h. homotop zum konstanten Weg ($t \mapsto \gamma(0) (= \gamma(1))$) homotop ist.

Beispiel 2.2.3. Jedes konvexe Gebiet $G \subset \mathbf{C}$ ist einfach zusammenhängend. $\mathbf{C} \setminus \{x \in \mathbf{R}, x \leq 0\}$ ist ebenfalls einfach zusammenhängend.

Wie sehr ein topologischer Raum ggf. nicht einfach zusammenhängend ist, wird durch die Fundamentalgruppe gemessen, siehe Übungsaufgabe 2.7.8

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist folgendes Theorem, welches die unnatürliche Einschränkung auf konvexe Gebiete in Bemerkung 2.2.1 aufhebt. Man kann zeigen (siehe [Rud87, Theorem 13.11]), dass die Bedingung an G nicht abgeschwächt werden kann: ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ so dass für alle holomorphen Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ und alle geschlossenen Wege $\gamma \subset G$ gilt $\int_{\gamma} f dz = 0$ muss einfach zusammenhängend sein.

Theorem 2.2.4. (Cauchyscher Integralsatz) Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und G einfach zusammenhängend. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist holomorph.
- (ii) f hat eine (holomorphe) Stammfunktion F , d.h. $F' = f$.
- (iii) Für jeden geschlossenen Weg γ in G gilt $\int_{\gamma} f dz = 0$.

Satz 2.2.5. (Cauchyscher Integralsatz) Sei G ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma_0 \sim \gamma_1$ zwei homotope, stückweise C^1 Wege in G (deren Anfangs- bzw. Endpunkt übereinstimmen). Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Falls G einfach zusammenhängend ist, gilt also für jeden geschlossenen stückweise C^1 -Weg:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

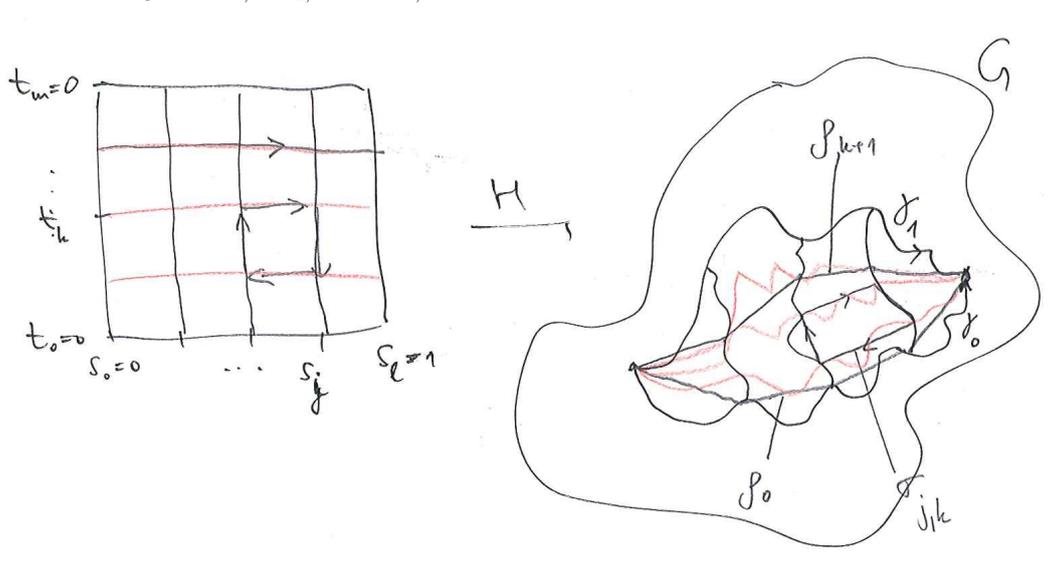
Beweis. Sei $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 , d.h. $H(s, t) = \gamma_t(s)$ für $t = 0, 1$ und $H(0, t) = x$, $H(1, t) = y$. Da $[0, 1] \times [0, 1]$ kompakt ist gibt es $\epsilon > 0$ so dass der Abstand von $\text{im} H$ und $\mathbb{C} \setminus G \geq \epsilon$ ist, d.h.

$$|H(s, t) - y| \geq \epsilon \quad \forall (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1], y \in \mathbb{C} \setminus U.$$

Nochmals wegen der Kompaktheit ist H gleichmäßig stetig, d.h. es gibt $\delta > 0$ mit

$$|t - t'| < \delta, |s - s'| < \delta \Rightarrow |H(s, t) - H(s', t')| < \epsilon/2.$$

Wähle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$, $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_l = 1$ so, dass $|t_k - t_{k-1}| < \delta$, $|s_j - s_{j-1}| < \delta$. Setze $u_{j,k} := H(s_j, t_k)$. Nach Definition hält die Homotopie Anfangs- und Endpunkte fest, d.h. $u_{0,k} = u_{l,k}$. Sei ρ_k der stückweise lineare Weg, der $u_{0,k}, u_{1,k}, \dots, u_{l,k}$ verbindet.



Sei ferner $\sigma_{j,k}$ der stückweise lineare Weg, der $u_{j-1,k-1}, u_{j-1,k}, u_{j,k}, u_{j,k-1}$ und $u_{j-1,k-1}$ miteinander verbindet. Nach Konstruktion ist $\text{im} \sigma_{j,k} \subset B_{\epsilon}(u_{j-1,k-1})$, welche konvexe und offene und nach Konstruktion eine Teilmenge von U ist. Es gilt also (Folgerung 2.1.14) $\int_{\sigma_{j,k}} f(z) dz = 0$. Hieraus folgt mit den Rechenregeln aus Beobachtung 2.1.8 induktiv $\int_{\rho_k} f dz = \int_{\rho_{k-1}} f dz$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\rho_0} f dz$ (und analog für γ_1 vs. ρ_m). Hierzu verfährt man analog zum obigen Beweis: es gibt $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass für alle $|s - s'| < \delta$ gilt $\gamma([s, s']) \in B_{\epsilon}(\gamma(s))$. Falls die s_j wie oben gewählt sind, ist der Weg τ_j , der durch Komposition von $\gamma_0|_{[s_{j-1}, s_j]}$ und dem (stückweise linearen) Weg $\rho_0|_{[s_{j-1}, s_j]}^{-1}$ entsteht, in einem konvexen Gebiet und daher gilt $\int_{\tau_j} f(z) dz = 0$. \square

Bemerkung 2.2.6. Ein “High-End-Beweis” dieser Tatsache, geht wie folgt: eine holomorphe Funktion f definiert eine 1-Form $f(z)dz$, die geschlossen ist, denn

$$d(f(z)dz) = \partial f / \partial z dz \wedge dz + \partial f / \partial \bar{z} d\bar{z} \wedge dz = 0.$$

D.h. $f(z)dz$ definiert ein Element in der 1. de Rham-Kohomologie $H_{\text{dR}}^1(G)$. Es folgt aus dem Satz von Stokes, dass die Paarung

$$H_1(G) \times H_{\text{dR}}^1(G) \rightarrow \mathbf{C}, (s, \omega) \mapsto \int_s \omega$$

wohldefiniert ist. Die obige Paarung $(\gamma, f) \mapsto \int_\gamma f(z)dz$ entsteht aus der Kombination der Hurewicz-Abbildung $\pi_1(G) \rightarrow H_1(G) = \pi_1(G)/[\pi_1(G), \pi_1(G)]$ und dieser Paarung.

Folgerung 2.2.7. Sei G einfach zusammenhängend, $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in G$ fixiert. Wähle für jedes $z \in G$ einen Weg γ_z von z_0 nach z . Dann hängt

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$$

nicht von der Wahl von γ_z ab und definiert eine Stammfunktion von f (d.h. $F' = f$ in G).

Beweis. Sei γ'_z ein weiterer solcher Weg. Dann ist $\gamma_z(\gamma'_z)^{-1}$ ein geschlossener Weg, nach Satz 2.2.5 gilt also

$$0 = \int_{\gamma_z(\gamma'_z)^{-1}} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta - \int_{(\gamma'_z)^{-1}} f(\zeta)d\zeta.$$

Man zeigt $F' = f$ wie im Beweis von Lemma 2.1.11. □

Definition 2.2.8. Sei $f : G \rightarrow \mathbf{C}^\times$ holomorph (d.h. $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$). Ein *Zweig des Logarithmus* von f ist eine holomorphe Funktion $L_f : G \rightarrow \mathbf{C}$, so dass $\exp(L_f(z)) = f(z)$ für alle $z \in G$ gilt.

Bemerkung 2.2.9. Für jeden Zweig L_f des Logarithmus gilt:

$$(L_f)'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{2.2.10}$$

(Man nennt die rechte Seite auch die *logarithmische Ableitung* von f .) In der Tat, aus der Kettenregel folgt:

$$f'(z) = \exp'(L_f(z))L_f'(z) = \exp(L_f(z))L_f'(z) = f(z)L_f'(z).$$

In Übungsaufgabe 2.7.10 berechnen wir eine Reihendarstellung von L_z auf dem Gebiet $|z - 1| < 1$.

Lemma 2.2.11. Sei $f : G \rightarrow \mathbf{C}^\times$ holomorph und G einfach zusammenhängend (dies schließt nach Definition ein, dass G wegzusammenhängend ist).

1. Es gibt einen Zweig des Logarithmus L_f .
2. Für einen beliebigen anderen Zweig \tilde{L}_f des Logarithmus gibt es ein eindeutiges $k \in \mathbf{Z}$ so dass für alle $z \in G$:

$$\tilde{L}_f(z) = L_f(z) + 2\pi ik.$$

Bemerkung 2.2.12. Man kann Lemma 2.2.11 zusammenfassen, indem man sagt, dass es eine Bijektion

$$2\pi i\mathbf{Z} \xrightarrow{\cong} \{\text{Zweige des Logarithmus von } f\}$$

gibt. Genauer definiert jeder fixierte Logarithmus L_f eine solche Bijektion. Insbesondere (dies ist wichtig) gibt es keine *ausgezeichnete* solche Bijektion, d.h. die Menge der Zweige des Logarithmus verhält sich wie die Gruppe $2\pi i\mathbf{Z}$, nur dass das neutrale Element “vergessen” wurde. Eine solche Struktur heißt auch *Torsor*.

Beweis. Da $g := f'/f$ auf G holomorph ist, hat g nach Theorem 2.2.4 auf dem einfach zusammenhängenden G eine Stammfunktion, die wir mit L_f bezeichnen. Es gilt

$$\left(\frac{f'}{\exp(L_f)} \right)' = \frac{f' \exp(L_f) - f L_f' \exp(L_f)}{\exp(L_f)^2} = 0,$$

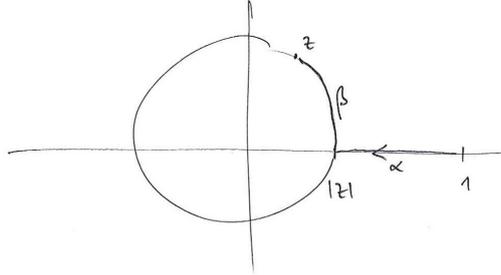
also gibt es $\alpha \in \mathbf{C}^\times$, so dass $\exp(L_f) = \alpha f$ (Übungsaufgabe 2.7.2). Wählen wir $\beta \in \mathbf{C}$ mit $\exp \beta = \alpha$ so gilt $\exp(L_f - \beta) = f$, wir erhalten also einen Zweig des Logarithmus.

Für einen anderen Zweig \tilde{L}_f gilt $\exp(\tilde{L}_f - L_f) = f/f = 1$, d.h. nach Beispiel 2.1.4 ist $h := \tilde{L}_f - L_f : G \rightarrow \mathbf{C}$ eine holomorphe und insbesondere stetige Funktion, die ihre Werte in $2\pi i\mathbf{Z}$ annimmt. Diese Menge ist diskret und G ist wegzusammenhängend und daher nach Übungsaufgabe 2.7.9 auch zusammenhängend. Die Urbilder $h^{-1}(2\pi ik)$, $k \in \mathbf{Z}$ sind offen und abgeschlossen, d.h. es gibt k mit $G = h^{-1}(2\pi ik)$, d.h. $h(G) = 2\pi ik$. □

Beispiel 2.2.13. (Komplexer Logarithmus) Da $G = \mathbf{C} \setminus [-\infty, 0]$ einfach zusammenhängend ist, hat die holomorphe Funktion $f(z) = 1/z$ eine Stammfunktion

$$\text{Log}(z) := \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

wobei γ_z ein beliebiger Weg von 1 nach z ist, z.B. der folgende



Es gilt also

$$\text{Log} z = \int_{\alpha} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\beta} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^{|z|} \frac{dt}{t} + i \int_0^{\arg(z)} dt = \log |z| + i \arg(z).$$

Man bezeichnet diese Funktion als *Hauptzweig des Logarithmus*. Hierbei verwenden wir die (vollkommen willkürliche) Konvention $-\pi < \arg(z) < \pi$. (Für $\zeta = r \exp(it)$ gilt $d\zeta/\zeta = \frac{itr \exp(it)}{r \exp(it)} = it$.) Aus Lemma 2.2.11 und seinem Beweis wissen wir, dass $\exp \text{Log} z = \alpha z$ mit $\alpha \in \mathbf{C}^\times$; für $z = 1$ erhalten wir $\exp \text{Log} 1 = \exp 0 = 1 = \alpha$, d.h.

$$\exp \text{Log} z = z \quad z \in \mathbf{C} \setminus [-\infty, 0].$$

Beispiel 2.2.14. (Komplexe Wurzel) Sei G wieder einfach zusammenhängend und $f : G \rightarrow \mathbf{C}^\times$ eine holomorphe Funktion und $n \in \mathbf{Z}$. Eine n -te Wurzel $\sqrt[n]{f}$ ist eine holomorphe Funktion der Form

$$(\sqrt[n]{f})(z) := \exp(L_f(z)/n) : G \rightarrow \mathbf{C}^\times,$$

wobei L_f ein Zweig des Logarithmus von f ist. Nach Lemma 2.2.11 existieren solche n -ten Wurzeln, sie erfüllen $(\sqrt[n]{f})^n = f$ und für zwei n -te Wurzeln gilt

$$\sqrt[n]{f} = \exp(2\pi ik/n) \sqrt[n]{f}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

2.3 Grundlegende Eigenschaften holomorpher Funktionen

Der nächste Satz ist ein weiterer gravierender Unterschied zwischen reeller und komplexer Analysis. Wir wissen bereits aus dem Cauchyschen Integralsatz (Theorem 2.1.15), dass $f : U_{r+\epsilon}(z_0) \rightarrow \mathbf{C}$ (holomorph) im Gebiet $U_r(z_0)$ bereits durch die Werte auf $|z - z_0| = r$ festgelegt wird. Die folgende Aussage ist eine massive Verschärfung dieser Tatsache.

Theorem 2.3.1. (Identitätssatz) Sei G ein Gebiet (also offen und wegzusammenhängend) und $f, g : G \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

(i) $f = g$

(ii) Es gibt eine Folge paarweise verschiedener Punkte $z_\nu \in G$, so dass $z_0 := \lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu$ existiert und in G liegt, und dass $f(z_\nu) = g(z_\nu)$.

Bemerkung 2.3.2. Ohne die Bedingung $z_0 \in G$ ist die Aussage falsch, wie man an $f = 0$ und $g = \sin(1/z)$, $z_\nu = (2\pi i \nu)^{-1}$ sieht.

Beweis. Sei o.E. $g = 0$. Setze $M := \{z \in G, f^{(n)}(z) = 0 \text{ für alle } n \geq 0\}$. Wir zeigen drei Behauptungen, aus diesen und Übungsaufgabe 2.7.9 folgt dann das Theorem.

1. M ist abgeschlossen: f , und mit ihr auch $f^{(n)}$ ist holomorph, insbesondere stetig.
2. $z_0 \in M$: sei z_ν eine Folge wie in (ii), $z_0 = \lim z_\nu$. o.E. sei $z_0 \neq z_\nu$ für alle $\nu \geq 1$ (lasse sonst ein z_ν weg). Nach Voraussetzung ist $f(z_\nu) = 0$ und demnach auch $f(z_0) = 0$. In der Taylorreihe (lokal um z_0) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $a_n := \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ ist also $a_0 = 0$. Wir zeigen nun induktiv $a_n = 0$ für alle n .

Angenommen, wir wissen $a_0 = \dots = a_{N-1} = 0$. Aus $0 = f(z_\nu) = (z_\nu - z_0)^N \sum_{n \geq N} a_n (z_\nu - z_0)^{n-N}$ folgt mittels $z_\nu \neq z_0$:

$$0 = a_N + (z_\nu - z_0)g(z_\nu),$$

wobei $g(z) := \sum_{n \geq N+1} a_n (z - z_0)^{n-N-1}$ eine in z_0 stetige Funktion ist. (Die Stetigkeit gilt da die Potenzreihe für f den gleichen Konvergenzradius wie die für g hat.) Für $\nu \rightarrow \infty$ ergibt sich $a_N = 0$.

3. M ist offen: für $z \in M$ verschwindet die Taylorreihe von f (lokal um z), also ist $f = 0$ in einer Umgebung $U \ni z$, also $U \subset M$.

□

Eine wichtige Anwendung des Identitätssatzes ist das Prinzip der analytischen Fortsetzung, siehe Übungsaufgabe 2.7.12. ■

Definition 2.3.3. Eine holomorphe Abbildung $f : U \rightarrow U'$ ($U' \subset \mathbf{C}$ offen) heißt *biholomorph*, wenn es eine holomorphe Abbildung $g : U' \rightarrow U$ gibt, so dass $f \circ g = \text{id}_{U'}$ und $g \circ f = \text{id}_U$. Falls es eine biholomorphe Abbildung gibt, sagt man auch kurz, dass U zu U' biholomorph ist.

Beispiel 2.3.4. • Nach Übungsaufgabe 2.7.6 ist $H = \{z \in \mathbf{C}, \Im(z) > 0\}$ zu $D := \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}$ biholomorph.

- Der Riemannsche Abbildungssatz (Theorem 2.6.1) besagt, dass jedes *einfach zusammenhängende* Gebiet $G \subsetneq \mathbf{C}$ zu H (oder D) biholomorph ist.
- Nach dem Satz von Liouville (Übungsaufgabe 2.7.7) ist jede holomorphe Funktion $f : \mathbf{C} \rightarrow U_1(0)$ konstant, also ist \mathbf{C} nicht biholomorph zu $U_1(0)$.

Wir hatten als eines der ersten Beispiele die holomorphen Funktionen $z \mapsto z^n$ kennen gelernt. Unser nächstes Ziel ist zu sehen, dass im Wesentlichen, d.h. bis auf eine biholomorphe Abbildung, jede holomorphe Abbildung lokal von dieser Form ist. Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir den Satz über Umkehrfunktionen in der folgenden Form:

Satz 2.3.5. (Umkehrsatz) Sei $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph und $z_0 \in U$ derart, dass $f'(z) \neq 0$. Dann gibt es offene Umgebungen $z_0 \in V \subset U$ und $f(z_0) \in W \subset \mathbf{C}$ so dass $f|_V : V \rightarrow W$ bijektiv ist und $g := (f|_V)^{-1} : W \rightarrow V$ ebenfalls holomorph ist.

Beweis. Wir verwenden im Beweis folgende Äquivalenz (Übungsaufgabe 2.7.1):

1. f ist holomorph
2. f ist, aufgefasst als Abbildung $U \rightarrow \mathbf{R}^2$, reell total differenzierbar und $f'(z) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ist \mathbf{C} -linear für alle $z \in U$.

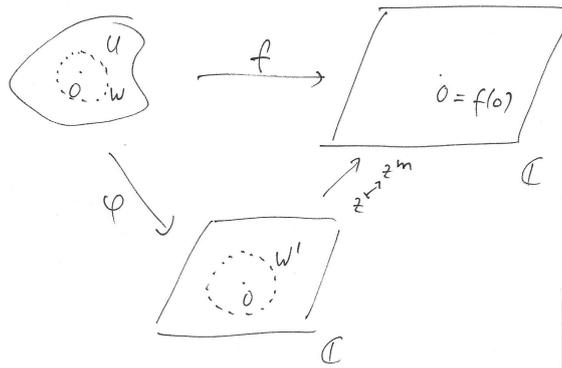
Aus dem Umkehrsatz über reelle Funktion erhalten wir V, W und die reell total differenzierbare Abbildung $g = f^{-1}$. Es gilt also für alle $w \in W$: $g'(w) = (f'(g(w)))^{-1}$ (Inverses einer reellen 2×2 -Matrix), diese ist wieder \mathbf{C} -linear, damit ist g holomorph. □

Satz 2.3.6. (Lokale Gestalt holomorpher Funktionen) Sei $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph. Der Einfachheit der Notation halber nehmen wir an, dass $0 \in U$ und $f(0) = 0$ gilt. Sei $m \geq 0$ die eindeutig bestimmte Zahl so dass lokal um $z = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_m \neq 0$. Dann gibt es offene Umgebungen $0 \in W$ und $0 \in W'$ und eine biholomorphe Abbildung $\varphi : W \rightarrow W'$ so, dass

$$f(z) = (\varphi(z))^m.$$



Beweis. Sei $\epsilon > 0$ so gewählt, dass $B_\epsilon(0) \subset U$ und so dass $\epsilon < \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{1/n}}$ (der Konvergenzradius der Reihe $\sum a_n z^n$). Der Konvergenzradius der Reihe $g(z) := \frac{f(z)}{a_m z^m}$ ist gleich dem von $\sum a_n z^n$, d.h. g ist lokal um 0 wohldefiniert und holomorph. Außerdem gilt $g(0) = 1$. Es gibt also $\epsilon > 0$ so dass $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U_\epsilon(0)$. Da der Ball insbesondere einfach zusammenhängend ist, gibt es eine holomorphe Funktion h auf $U_\epsilon(0)$ mit $h^m = g$ (Beispiel 2.2.14). Wähle außerdem $a \in \mathbf{C}^\times$ mit $a^m = a_m$ und setze

$$\varphi(z) := azh(z).$$

($z \in U_\epsilon(0)$). Es gilt $\varphi'(0) = ah(0) \neq 0$, nach dem Umkehrsatz (Satz 2.3.5) gibt es also eine offene Umgebungen $0 \in W \subset U_\epsilon(0)$ sowie $0 = f(0) \in W' \subset \mathbf{C}$, so dass $\varphi|_W : W \rightarrow W'$ biholomorph ist. \square

Folgerung 2.3.7. *Eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ auf einem Gebiet G ist entweder konstant oder offen, d.h. $f(U)$ ist offen für alle offenen Teilmengen $U \subset G$.*

Beweis. Sei U offen, ohne Einschränkung ist $U \neq \emptyset$, wir wählen $z \in U$. Nach dem Identitätssatz (Theorem 2.3.1) ist f genau dann nicht konstant, wenn f auf einer kleinen Umgebung von z nicht konstant ist. Da biholomorphe Abbildungen offen sind, können wir nach Satz 2.3.6 annehmen, dass $f(z) = z^m$ ist.

Für $m = 0$ ist die Abbildung konstant. Um zu sehen, dass diese Abbildung für $m \neq 0$ offen ist, betrachten wir die Umgebungsbasis $B_\epsilon(0)$ und $S(\varphi, \epsilon, r_1, r_2) := \{z \in \mathbf{C}, |\arg(z) - \varphi| < \epsilon, r_1 < |z| < r_2\}$, wobei $\varphi \in [-\pi, \pi]$, $\epsilon > 0$ und $0 < r_1 < r_2$ beliebig sind. Die Bilder dieser offenen Mengen sind $B_{\epsilon m}(0)$ und (für $\epsilon < 2\pi/m$) $S(m\varphi, m\epsilon, mr_1, mr_2)$, welche wieder offen sind. \square

Folgerung 2.3.8. (Maximumsprinzip) *Sei $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph. Wenn es $z_0 \in G$ gibt, so dass $|f(z)|$ in z_0 ein lokales Maximum hat (d.h. es gibt $z_0 \in U \subset G$, U offen) und $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in W$, dann ist f konstant.*

Beweis. Angenommen f ist nicht konstant, also offen (Folgerung 2.3.7). Außerdem ist $|\cdot| : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}^{\geq 0}$ ebenfalls offen: um dies zu sehen, reicht es, dass $|B_\epsilon(z)|$ offen ist. Demnach ist $|f(U)| \subset \mathbf{R}^{\geq 0}$ (U wie in der Definition des lokalen Maximums) offen. Andererseits ist $|f(z_0)|$ kein innerer Punkt nach Voraussetzung, dies ist ein Widerspruch zur Annahme. \square

2.4 Folgen holomorpher Funktionen

Der folgende Satz ist ein weiterer Kontrast zur reellen Analysis: dort besagt der Weierstraßsche Approximationssatz, dass jede stetige (also weitaus mehr als nur differenzierbare oder gar unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ als gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von Polynomen geschrieben werden kann.

Folgerung 2.4.1. (Satz von Weierstraß) *Seien $f_\nu : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergieren. Dann ist f ebenfalls holomorph. Ferner konvergiert $f_\nu^{(n)}$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(n)}$ für $n \geq 1$.*

Beweis. Aus der reellen Analysis wissen wir, dass f stetig ist. Sei $\Delta \subset U$ ein abgeschlossenes Dreieck. Wegen der Kompaktheit von $\partial\Delta$ konvergiert die Folge (f_ν) bereits gleichmäßig. Daraus und dem Lemma von Goursat folgt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_\nu(z) dz = 0,$$

d.h. nach dem Satz von Morera ist f holomorph auf U . Die Konvergenzaussage für $f_\nu^{(n)}$ folgt aus der Abschätzung (2.1.18), angewandt auf $f - f_\nu$ und $\delta = r/2$. (In Worten impliziert diese Abschätzung: die gleichmäßige Konvergenz von f_ν auf $\overline{U_{r/2}(z_0)}$ impliziert auch die gleichmäßige Konvergenz von $f_\nu^{(n)}$.) \square

Der folgende Satz von Montel wird an zwei entscheidenden Stellen benutzt: für den Riemannschen Abbildungssatz (Theorem 2.6.1) und auch für die später bewiesene Tatsache, dass die Kohomologien kompakter Riemannscher Flächen endlich-dimensional sind. Man vergleiche den Satz mit folgenden Tatsachen:

- Der Satz von Heine-Borel besagt: eine Teilmenge $A \subset \mathbf{C}^n$ ist relativ kompakt (d.h. der Abschluss $\overline{A} \subset \mathbf{C}^n$ ist kompakt) genau dann, wenn A beschränkt ist.

Jede Folge $(z_n) \subset A$ hat dann eine konvergente Teilfolge (ihr Limes muss allerdings nicht in A liegen).

- Der Satz von Arzela-Ascoli (siehe etwa [Rud87, Theorem 11.28]) besagt, dass eine Teilmenge $A \subset C(\mathbf{C}^n)$ (stetige Funktionen auf \mathbf{C}^n) relativ kompakt ist genau dann, wenn A punktweise beschränkt und gleichgradig stetig ist (d.h. für alle $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so dass für alle $z_1, z_2 \in \mathbf{C}^n$ mit $|z_1 - z_2| < \delta$ gilt $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$).

Definition 2.4.2. Eine Menge A von Funktionen $X \rightarrow \mathbf{C}$ heißt *gleichmäßig beschränkt*, wenn die Menge $\{f(x), f \in A, x \in X\} \subset \mathbf{C}$ beschränkt ist.

Satz 2.4.3. (Satz von Montel) Sei $(f_n) \subset \mathcal{O}(U)$ eine Folge holomorpher Funktionen, die auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset U$ gleichmäßig beschränkt sind.

Dann enthält (f_n) eine Teilfolge (f_{n_k}) , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert.

Bemerkung 2.4.4. Man kann den Vektorraum $\mathcal{O}(U)$ mit einer Familie von Normen ausstatten, nämlich $|f|_K = \{\sup|f(x)|, x \in K\}$, wobei $K \subset U$ die Kompakta durchläuft. Diese Familie von Normen definiert eine Topologie (nämlich $f_n \rightarrow f$ genau dann, wenn $|f - f_n|_K \rightarrow 0$ für alle K). Mit dieser Topologie lässt sich der Satz von Montel auch so formulieren: eine Familie $A \subset \mathcal{O}(U)$ ist relativ kompakt wenn (und nur wenn) A bezüglich der Familie der Normen $|\cdot|_K$ beschränkt ist.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $U = B_1(0)$ und dass $\sup_{z \in U} |f_n(z)| \leq C < \infty$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Sei $f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n,\nu} z^\nu$ die Taylorreihe von f in U . Dann gilt $|a_{n,\nu}| \leq |\sum_{\nu} a_{n,\nu}| = \lim_{z \rightarrow 1} |f_n(z)| \leq C$.

Nach dem Diagonalverfahren gibt es eine Teilfolge f_{n_k} , so dass für alle ν die $a_{n_k,\nu}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen ein $c_\nu \in \mathbf{C}$ konvergieren. Dies geht wie folgt:

- Es gibt wegen der Beschränktheit eine Teilfolge $a_{n_{k_0},0}$ die für $k \rightarrow \infty$ gegen ein $c_0 \in \mathbf{C}$ konvergiert.
- Anschließend wählen wir eine Teilfolge dieser Folge, $a_{n_{k_1},1}$ die für $k \rightarrow \infty$ gegen c_1 konvergiert.
- Induktiv erhalten für jedes $\nu \geq 0$ eine Teilfolge $a_{n_{k_\nu},\nu}$, die für $k \rightarrow \infty$ gegen c_ν konvergieren.
- Setze $\hat{n}_k := n_{k_k}$ (dies ist unabhängig von ν !). Dann ist (für jedes ν) $a_{\hat{n}_k,\nu}$ eine Teilfolge der oben konstruierten Folge $a_{n_{k_\nu},\nu}$ und konvergiert damit für $k \rightarrow \infty$ ebenfalls gegen c_ν .
- Die $a_{\hat{n}_k,\nu}$ ist die gesuchte Teilfolge.

Wir setzen $f(z) := \sum_{\nu} c_\nu z^\nu$. Wir wollen zeigen, dass f_{n_k} für fixiertes $r < 1$ auf $U_r(0)$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Für $|z| < r$ gilt:

$$|f(z) - f_{n_k}(z)| = \left| \sum_{\nu} (c_\nu - a_{n_k,\nu}) z^\nu \right| \leq \sum_{\nu=0}^N |(c_\nu - a_{n_k,\nu})| + 2C \sum_{\nu > N} r^\nu.$$

Hierbei ist N zunächst beliebig. Für $\epsilon > 0$ können wir N so wählen, dass der zweite Summand $< \epsilon/2$ ist. Wähle dann k_0 so, dass der erste Summand ebenfalls $< \epsilon/2$ für alle $k \geq k_0$ ist.

Wir zeigen die Behauptung nun im allgemeinen Fall. Sei hierzu $K \subset U$ kompakt. Dann wird K durch endlich viele offene Einheitsbälle B_i , deren Abschluss in U kompakt ist, überdeckt. Aus dem obigen Fall gibt es eine Teilfolge von (f_n) , die auf diesen endlich vielen B_i und damit auch auf K gleichmäßig konvergiert. Wähle nun eine Ausschöpfung $U = K_0 \subset K_1 \subset \dots$ durch Kompakta. Mittels einer Diagonalfolge (Details analog zu oben) erhält man eine Teilfolge von (f_n) , die auf jedem K_i gleichmäßig konvergiert. Da jede kompakte Menge $K \subset U$ in einem K_i enthalten ist, konvergiert diese Teilfolge auch auf K gleichmäßig. \square

2.5 Meromorphe Funktionen

Eingangs wurde bereits erwähnt, dass Funktionen wie $f(z) = 1/z$ lediglich auf $\mathbf{C}^\times = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ holomorph sind. Außerdem hatten wir in Satz 1.0.12 schon angedeutet dass auf kompakten Riemannschen Flächen (z.B. \mathbf{P}^1) lediglich konstante holomorphe Funktionen gibt. Meromorphe Funktionen, die wir nun einführen werden, sind flexibel genug, um wesentliche Aspekte der Geometrie Riemannscher Flächen zu beschreiben.

Um zu beschreiben, wie und ob sich holomorphe Funktionen auf $U \setminus \{z_0\}$ zu Funktionen auf U fortsetzen lassen, führen wir folgende Sprechweise ein:

Definition 2.5.1. Sei $z_0 \in U \subset \mathbf{C}$, $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph. Man nennt z_0 dann eine *isolierte Singularität* von f . Wir unterscheiden folgende drei Typen:

1. z_0 heißt *hebbare Singularität*, wenn es eine holomorphe Funktion \hat{f} gibt so dass $\hat{f}|_{U \setminus \{z_0\}} = f$.
2. z_0 heißt *Pol* von f , wenn z_0 nicht hebbar ist, es jedoch $m \geq 1$ gibt, so dass $(z - z_0)^m f$ eine hebbare Singularität bei z_0 hat. Die kleinste solche Zahl m heißt *Polordnung* von f bei z_0 . (Hierzu offenbar äquivalent: $f(z) = (z - z_0)^{-m} h(z)$ mit $h : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph und $h(z_0) \neq 0$. Dies bestimmt m eindeutig; m ist die Polordnung.)
3. Andernfalls heißt z_0 *wesentliche Singularität*.

Beispiel 2.5.2. Die Funktionen $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{\exp z}{z}$, $\exp(1/z)$ haben eine hebbare Singularität, einen Pol 1. Ordnung, bzw. eine wesentliche Singularität in $z = 0$ (Übungsaufgabe 2.7.11).

Der folgende Satz liefert uns ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass eine Singularität hebbbar ist.

Theorem 2.5.3. (Riemannscher Hebbarkeitssatz) Sei $z_0 \in U$, $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

- (i) es gibt eine eindeutige holomorphe Funktion $\hat{f} : U \rightarrow \mathbf{C}$ mit $\hat{f}|_{U \setminus \{z_0\}} = f$, d.h. f hat eine hebbare Singularität.
- (ii) f ist in einer Umgebung von z_0 beschränkt.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) ist klar wegen der Stetigkeit von \hat{f} . Für die Umkehrung setze

$$F(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}.$$

Nach Voraussetzung ist $F : U \rightarrow \mathbf{C}$ stetig und in $U \setminus \{z_0\}$ holomorph. Nach Lemma 2.1.12 und Lemma 2.1.11 hat F auf $U_\epsilon(z_0)$ eine (holomorphe) Stammfunktion und ist demnach (Theorem 1.0.3) dort selbst holomorph. Ebenfalls nach Theorem 1.0.3 gilt in einer Umgebung von z_0

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu,$$

wobei $a_\nu = \frac{F^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$. (Beachte hierbei $F(z_0) = 0$.) Die Reihe $\hat{f}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^{\nu-1}$ definiert in einer Umgebung von z_0 eine holomorphe Funktion (beachte hierzu dass der Konvergenzradius der Reihe von \hat{f} gleich dem der Reihe von F ist). Für $z \neq z_0$ gilt ferner $\hat{f}(z) = f(z)$. Die Eindeutigkeit von \hat{f} ist klar. \square

Definition 2.5.4. Eine meromorphe Funktion “ f auf U ” ist eine holomorphe Funktion $f : U \setminus S \rightarrow \mathbf{C}$, wobei S eine Menge von isolierten Punkten ist (d.h. für alle $s \in S$ gibt es $\epsilon > 0$ so dass $U_\epsilon(s) \cap S = \{s\}$), so dass f in den Punkten von S keine wesentlichen Singularitäten hat. Die Menge der meromorphen Funktionen wird mit $\mathcal{M}(U)$ bezeichnet.

Lemma 2.5.5. Für $f, g \in \mathcal{M}(U)$ definieren wir $f + g, fg$ auf $U \setminus \{\text{Pole von } f \text{ oder } g\}$ wie gewohnt und setzen sie (in den hebbaren Singularitäten) holomorph fort. Auf diese Weise wird $\mathcal{M}(U)$ zu einem kommutativen Ring (mit $\mathcal{O}(U)$ als Unterring) und, falls G ein Gebiet ist, ist $\mathcal{M}(G)$ ein Körper.

Beweis. Die Überprüfung der Ringaxiome ist formal. Der Identitätssatz impliziert dass $\mathcal{M}(G)$ ein Körper ist: für $g \in \mathcal{M}(G), g \neq 0$ ist die Menge der Nullstellen von g isoliert, d.h. für jede Nullstelle z_0 von g gibt es eine Umgebung $U_r(z_0)$ in der außer z_0 keine weitere Nullstelle von g liegt. \square

Definition 2.5.6. Eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U) \setminus \{0\}$ hat in $z_0 \in U$ eine Nullstelle der Ordnung n wenn $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ mit g holomorph und $g(z_0) \neq 0$. (Äquivalent hierzu: $1/f$ hat Polstelle n -ter Ordnung.)

Die Ordnung einer meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(U) \setminus \{0\}$ in $z_0 \in U$ ist definiert als

$$\text{ord}_{z_0} f := \begin{cases} m & \text{falls } f \text{ in } z_0 \text{ Nullstelle } m\text{-ter Ordnung hat,} \\ 0 & \text{falls } f \text{ in } z_0 \text{ holomorph ist und } f(z_0) \neq 0, \\ -m & \text{falls } f \text{ in } z_0 \text{ Polstelle } m\text{-ter Ordnung hat.} \end{cases}$$

Bemerkung 2.5.7. Offenbar ist $\text{ord}_{z_0} : \mathcal{M}(U) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{Z}$ ein Gruppenhomomorphismus, d.h. $\text{ord}(fg^{-1}) = \text{ord} f - \text{ord} g$. Wenn man holo- (bzw. meromorphe) Funktionen in beliebig kleinen Umgebungen betrachtet, charakterisiert die Ordnung einer Funktion diese bereits in hohem Maße, wie in Übungsaufgabe 2.7.14 erklärt wird.

Definition 2.5.8. Ist $f \in \mathcal{M}(U) \setminus \{0\}$, $z_0 \in U$, so ist $(z - z_0)^m f(z)$ für geeignetes $m \geq 0$ holomorph fortsetzbar, also in einer Umgebung $z_0 \in U' \subset U$ durch eine Potenzreihe gegeben, d.h. in U' gilt

$$f(z) = \sum_{\nu=-m}^{-1} \frac{a_\nu}{(z - z_0)^\nu} + h(z),$$

wobei h holomorph in U' ist. Das Residuum von f ist definiert als

$$\text{res}_{z_0} f := a_{-1}.$$

Bemerkung 2.5.9. Für genügend kleine $\epsilon > 0$ gilt

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\epsilon(z_0)} f(z) dz.$$

In der Tat: aus dem Cauchyschen Integralsatz (Satz 2.2.5) folgt $\int_{\partial U_\epsilon(z_0)} h(z) dz = 0$ wenn h auf $\overline{U_\epsilon(z_0)}$ holomorph ist. Außerdem geben die Beiträge für $\nu \neq -1$ keinen Beitrag nach Übungsaufgabe 2.7.5. Alternativ kann man die Formel auch aus Satz 2.1.19 (angewandt auf $f(z)(z - z_0)^m$) ablesen.

Wir möchten nun den Residuensatz formulieren, der eine Aussage über Residuen im Inneren eines Weges macht. Hierfür benötigen wir folgenden Aussage, die wir nicht beweisen werden. Für die Wege γ , die wir antreffen wird stets klar sein, was das Innere ist. Siehe z.B. [Why64] für einen Beweis.

Definition und Lemma 2.5.10. (*Jordanscher Kurvensatz*) Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ ein geschlossener stückweise C^1 -Weg ohne Selbstüberschneidungen, d.h. γ ist auf $[0, 1)$ injektiv. Dann gilt

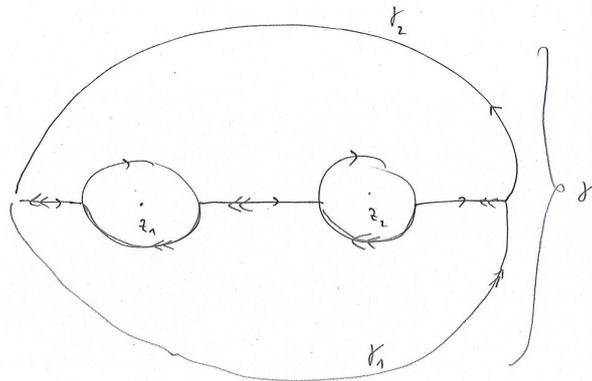
$$\mathbf{C} \setminus \operatorname{im}(\gamma) = I \sqcup A,$$

wobei I und A offene Teilmengen sind und I beschränkt und A unbeschränkt ist. Man nennt I das *Innere* von γ .

Theorem 2.5.11. (*Residuensatz*) Sei G einfach zusammenhängendes Gebiet, γ geschlossener stückweise C^1 -Weg ohne Selbstüberschneidungen (d.h. γ ist injektiv auf $[0, 1)$). Sei f meromorphe Funktion auf G ohne Polstellen auf γ . Seien z_1, \dots, z_n die Polstellen von f "im Inneren" von γ . (Es sind notwendigerweise nur endlich viele, da die Polstellenmenge von f nach Definition diskret und das Innere von γ beschränkt ist.) Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{z_i} f.$$

Beweis. Wir betrachten die folgenden Wege (am Beispiel von $n = 2$):



Im Innern der Wege γ_1 und γ_2 ist f holomorph, die Wege sind nullhomotop, d.h. aus dem Cauchy-Integralsatz (Theorem 2.2.4) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_k \int_{\partial U_\epsilon(z_k)} f(z) \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_k 2\pi i \operatorname{res}_{z_k} f \quad (\text{nach Bemerkung 2.5.9}). \end{aligned}$$

□

Folgerung 2.5.12. Mit der Notation von Theorem 2.5.11 sei γ derart, dass f auf γ keine Null- und Polstellen hat. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_0} \operatorname{ord}_{z_0} f = \text{Anzahl der Nullstellen} - \text{Anzahl der Polstellen von } f \text{ (mit Vielfachheit)},$$

wobei die Summe rechts über alle z_0 im Innern von γ läuft. (Die Summe ist endlich, da die Null- und Polstellen von f diskret sind.)

Bemerkung 2.5.13. Es ist nicht a priori klar, dass die linke Seite überhaupt eine ganze Zahl ist!

Das Theorem lässt sich effektiv anwenden, um numerisch die Existenz von Nullstellen holomorpher Funktionen in bestimmten Bereichen zu zeigen oder zu widerlegen.

Beweis von Folgerung 2.5.12. Schreibe $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$ mit einem eindeutigen $m \in \mathbf{Z}$ und h holomorph in einer Umgebung von z_0 , $h(z_0) \neq 0$. Dann gilt $f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} h(z) + (z - z_0)^m h'(z)$, d.h.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}. \tag{2.5.14}$$

Also gilt $\operatorname{res}_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = m = \operatorname{ord}_{z_0} f$. Die Behauptung folgt damit aus dem Residuensatz (Theorem 2.5.11), angewandt auf f'/f . \square

Folgerung 2.5.15. (Satz von Rouché) *Seien f, g holomorph auf G und $z_1, \dots, z_n \in G$ und für $D_i := U_{r_i}(z_i)$ sei $\bar{D}_i \subset G$. Es gelte*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{für } z \in \bigcup \partial D_i.$$

Dann haben f und g auf $\bigcup_i D_i$ gleichviele Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt).

Beweis. Setze $h_\lambda(z) := f(z) + \lambda(g(z) - f(z))$. Dann ist auf $\bigcup \partial D_i$ $|h_\lambda(z)| > 0$ für alle $\lambda \in [0, 1]$. (Sonst wäre $|f(z)| = \lambda|g(z) - f(z)|$, im Widerspruch zur Voraussetzung.) Wir dürfen also Folgerung 2.5.12 anwenden und erhalten:

$$\sum_{z_0 \in \bigcup D_i} \operatorname{ord}_{z_0} h_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bigcup \partial D_i} \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)} dz.$$

In Abhängigkeit von λ ist die rechte Seite stetig, jedoch wegen der linken Seite eine ganze Zahl, d.h. konstant. Für $\lambda = 0$ bzw. 1 erhalten wir die Nullstellenzahl von f bzw. g in $\bigcup D_i$. \square

2.5.1 Elliptische Funktionen

Notation 2.5.16. In diesem Abschnitt sei $\Lambda = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2 \subset \mathbf{C}$ die Untergruppe, die von zwei \mathbf{R} -linear unabhängigen Zahlen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ erzeugt wird. Wir nennen Λ auch *Gitter* oder *Periodengitter*.

Definition 2.5.17. 1. Die Teilmenge $P := \{r_1\omega_1 + r_2\omega_2, 0 \leq r_1, r_2 < 1\} \subset \mathbf{C}$ heißt *Periodenparallelogramm*. Für jedes $z \in \mathbf{C}$ gibt es (wegen der \mathbf{R} -linearen Unabhängigkeit) von ω_1 und ω_2 genau ein $\lambda \in \Lambda$ mit $z \in P + \lambda$.

2. Eine *elliptische Funktion* (bezgl. Λ) ist eine meromorphe Funktion f auf \mathbf{C} , die

$$f(z + \lambda) = f(z)$$

für alle $\lambda \in \Lambda$ erfüllt.

Definition 2.5.18. Die Funktion

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum' \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

heißt *Weierstraßsche \wp -Funktion*. Hierbei heißt $\sum' := \sum_{\lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0}$. (Wir werden in Kürze sehen: \wp ist eine elliptische Funktion bezüglich Λ .)

Elliptische Funktionen werden genau die meromorphen Funktionen auf der Riemannschen Fläche $X = \mathbf{C}/\Lambda$ sein, die wir in Kürze einführen werden. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist folgendes Theorem:

Theorem 2.5.19. *Die elliptischen Funktionen (stets bezüglich eines fixierten Gitters Λ) bilden einen Körper, den wir mit $\mathcal{M}(\Lambda)$ bezeichnen. Es gibt einen Isomorphismus*

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(x)[y]/(y^2 - 4x^3 - g_2x - g_3) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(\Lambda) \\ x &\mapsto \wp, \\ y &\mapsto \wp'. \end{aligned}$$

Hierbei sind $g_2, g_3 \in \mathbf{C}$ gewisse komplexe Zahlen, die von Λ abhängen (s.u.)

Der Beweis wird sich über die folgenden Lemmata erstrecken. Wir beginnen mit einem einfacheren Beispiel für elliptische Funktionen:

Lemma 2.5.20. *Die Reihe*

$$h(z) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^k}$$

definiert für $k \geq 3$ eine elliptische Funktion.

Beweis. 1. Wir zeigen als erstes, dass die Reihe

$$\sum' \lambda^{-k} \tag{2.5.21}$$

für $k > 2$ absolut konvergiert. Für $l = 1, 2, \dots$ sei P_l das Parallelogramm mit den Ecken $\pm l\omega_1 \pm l\omega_2$. Dann ist $\delta := \text{dist}(\partial P_1, 0) > 0$, $l\delta = \text{dist}(\partial P_l, 0)$. Auf ∂P_l liegen $8l$ Gitterpunkte, für diese gilt $|\lambda|^k \geq (l\delta)^k$. Hieraus folgt

$$\sum' |\lambda|^{-k} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\lambda \in \partial P_l} |\lambda|^{-k} \leq 8\delta^{-k} \sum_l l^{-k+1} < \infty.$$

(In der endlichen Summe stehen $8l$ Terme, die jeweils $\leq (l\delta)^{-k}$ sind.)

2. Wir zeigen nun, dass die Reihe $\sum' \frac{1}{(z-\lambda)^k}$ für $z \neq 0$ auf ganz \mathbf{C} absolut und lokal gleichmäßig konvergiert. Sei also $R > 0$. Es gibt dann (wegen der \mathbf{R} -linearen Unabhängigkeit von ω_1, ω_2) nur endlich viele $\lambda \in \Lambda$ mit $|\lambda| < 2R$. Für $|z| \leq R$ und $|\lambda| \geq 2R$ gilt $|z - \lambda| \geq |\lambda| - |z| \geq |\lambda|/2$, und damit

$$\sum_{|\lambda| \geq 2R} |z - \lambda|^{-k} \leq 2^k \sum_{|\lambda| \geq 2R} |\lambda|^{-k} < \infty.$$

3. Aus dem vorigen Punkt folgt für jedes $\lambda_0 \in \Lambda$: $h(z + \lambda_0) = h(z)$ durch Umordnen der Reihenglieder (erlaubt wegen absoluter Konvergenz). Außerdem folgt, dass h auf $\mathbf{C} \setminus \Lambda$ holomorph ist und in Λ Pole k -ter Ordnung hat, d.h. insgesamt eine meromorphe Funktion auf \mathbf{C} definiert. \square

Lemma 2.5.22. *Sowohl \wp , als auch ihre Ableitung \wp' sind elliptische Funktionen.*

Beweis. Wir zeigen, zunächst, dass \wp meromorph ist. Sei $|z| \leq R$. Für fast alle Reihenglieder gilt $|\lambda| \geq 2R$. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right| &= \left| \frac{\lambda^2 - z^2 + 2\lambda z - \lambda^2}{\lambda^2(z - \lambda)^2} \right| \\ &= \left| \frac{z(z - 2\lambda)}{\lambda^2(z - \lambda)^2} \right| \\ &\leq \frac{R3|\lambda|}{|\lambda|^2 \frac{3|\lambda|^2}{4}} \\ &= \frac{4R}{|\lambda|^3}. \end{aligned}$$

In der Abschätzung haben wir die Dreiecksungleichung verwendet: $|z - 2\lambda| \leq |z| + 2|\lambda| \leq 3|\lambda|$ sowie $|z - \lambda|^2 \geq |\lambda|^2 - |z|^2 \geq \frac{3|\lambda|^2}{4}$. Wir haben in (2.5.21) gesehen, dass die Reihe $\sum |\lambda|^{-3}$ (absolut) konvergiert, aus diesem Grund folgt die behauptete lokal gleichmäßige Konvergenz. Hieraus folgt auch, dass \wp eine meromorphe Funktion auf ganz \mathbf{C} definiert, da

$$\wp(z) = \underbrace{1/z^2 + \sum_{|\lambda| < 2R} \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)}_{\text{auf } \mathbf{C} \text{ meromorph, da nur endlich viele Summanden}} + \underbrace{\sum_{|\lambda| \geq 2R} \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)}_{\text{für } |z| \leq R \text{ holomorph}}.$$

Da die Reihe, die \wp definiert, lokal gleichmäßig (in allen Punkten von $\mathbf{C} \setminus \Lambda$) konvergiert, dürfen wir gliedweise differenzieren und erhalten

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2 \sum' \frac{1}{(z - \lambda)^3} = -2 \sum \frac{1}{(z - \lambda)^3}.$$

Also ist \wp' genau wie \wp (auf ganz \mathbf{C}) meromorph und ist nach Lemma 2.5.20 eine elliptische Funktion. Wegen

$$(\wp(z + \lambda_0) - \wp(z))' = \wp'(z + \lambda_0) - \wp'(z) = 0$$

gilt $\wp(z + \lambda_0) - \wp(z) = \text{const}$ (wir verwenden Übungsaufgabe 2.7.2). Diese Konstante ist 0, denn

$$\wp\left(\frac{\lambda_0}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\lambda_0}{2}\right)$$

(nach Definition ist $\wp(z) = \wp(-z)$ für alle $z \in \mathbf{C}$.) Also ist auch \wp elliptisch. □

Wir wissen nun also $\wp, \wp' \in \mathcal{M}(\Lambda)$.

Lemma 2.5.23. *Es gilt die folgende Differential-Gleichung (die gelegentlich auch als Weierstraß-Gleichung bezeichnet wird)*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3, \tag{2.5.24}$$

wobei $g_2 := 60 \sum' \lambda^{-4}$ und $g_3 := 140 \sum' \lambda^{-6}$ sind. (Diese Reihen sind nach (2.5.21) absolut konvergent.)

Beweis. Wir bestimmen zunächst die Taylorreihe von \wp . Setze $h(z) := \wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum' \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{z^2}$. Sei $f(z) := (z-\lambda)^{-2}$ und damit $f^{(k)}(z) = (-1)^k(k+1)!(z-\lambda)^{-k-2}$. Für $|z| < |\lambda|$ gilt:

$$\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)z^k}{k!} - \lambda^{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+1)}{\lambda^{k+2}} z^k.$$

Bilden wir \sum' über diesen Ausdruck, so konvergiert dies (wie wir bereits wissen) lokal gleichmäßig. Nach dem Satz von Weierstraß (Folgerung 2.4.1) konvergieren auch die k -ten Ableitungen lokal gleichmäßig und wir erhalten

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum' \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+1)}{\lambda^{k+2}} z^k \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^k(k+1) \left(\sum' \frac{1}{\lambda^{k+2}} \right)}_{=: c_k} z^k \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} z^{2k} \\ &= \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \dots \end{aligned} \tag{2.5.25}$$

Beachte: für ungerade k ist $c_k = 0$, da die Summanden für λ und $-\lambda$ sich aufheben. Hieraus folgen:

$$\begin{aligned} \wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + 3c_2 \frac{1}{z^2} + 3c_4 + \dots, \\ \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 2c_2 z + 4c_4 z^3 + \dots, \\ \wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - 8c_2 \frac{1}{z^2} - 16c_4 + \dots \end{aligned}$$

Damit ist $-4\wp^3 + (\wp')^2 + 20c_2\wp + 28c_4$ eine elliptische holomorphe Funktion, die außerdem in $z = 0$ den Wert 0 annimmt.

Jede holomorphe elliptische Funktion f ist jedoch konstant: $f(\mathbf{C}) = f(\overline{P}) \subset \mathbf{C}$ ist eine kompakte und damit insbesondere beschränkte Menge. Nach dem Satz von Liouville (Übungsaufgabe 2.7.7) ist f damit konstant. Damit erhalten wir die behauptete Differentialgleichung unter Beachtung von $g_2 = 60 \sum' \lambda^{-4} = 20 \cdot c_2$, $g_3 = 28c_4$. □

Beweis von Theorem 2.5.19. Sicher bildet $\mathcal{M}(\Lambda)$ einen Teilkörper von $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ (der nach Lemma 2.5.5 ein Körper ist). Die Differentialgleichung (2.5.24) liefert uns einen (eindeutigen) Ringhomomorphismus

$$\mathbf{C}(x)[y]/(y^2 - 4x^3 - g_2x - g_3) \rightarrow \mathcal{M}(\Lambda),$$

mit $x \mapsto \wp, y \mapsto \wp'$. Außerdem ist die linke Seite ein Körper, denn $y^2 - 4x^3 - g_2x - g_3$ ist über $\mathbf{C}(x)$ irreduzibel (andernfalls müsste es in Linearfaktoren zerfallen, d.h. es gäbe ein Element $s \in \mathbf{C}(x)$ mit $s^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, dies ist aus Gradgründen unmöglich). Jeder Körperhomomorphismus ist injektiv. Um zu zeigen, dass der obige Homomorphismus auch surjektiv ist werden wir zeigen:

1. Jede gerade (d.h. $f(z) = f(-z)$) elliptische Funktion f ist von der Form $f = R(\wp)$, wobei $R(X) \in \mathbf{C}(x)$ eine rationale Funktion ist.
2. Jede ungerade (d.h. $f(z) = -f(-z)$) elliptische Funktion g ist von der Form $g = \wp' R(\wp)$, $R \in \mathbf{C}(x)$.

Da jedes $f \in \mathcal{M}(\Lambda)$ als $f = \frac{f(z)+f(-z)}{2} + \frac{f(z)-f(-z)}{2}$ als Summe von gerader und ungerade elliptischer Funktion geschrieben werden kann, ergibt sich hieraus die Aussage des Theorems. Es reicht (1) zu zeigen, denn jede für ungerade elliptische Funktion g ist g/\wp' gerade.

Sei nun f gerade, elliptisch. Seien z_1, \dots, z_n die (notwendigerweise endlich vielen) Polstellen von f in $P \setminus \{0\}$. Für hinreichend große m_j hat

$$f_1(z) := \prod_{j=1}^n (\wp(z) - \wp(z_j))^{m_j} f(z)$$

höchstens in 0 einen Pol (denn $\wp(z) - \wp(z_j)$ hat in z_j eine Nullstelle).

Es reicht also, folgende Behauptung zu zeigen: jede gerade elliptische Funktion f_1 , die höchstens in Λ Pole hat ist von der Form

$$f_1 = a_0 + a_1\wp + \dots + a_n\wp^n, a_i \in \mathbf{C}.$$

Die Behauptung ist richtig, wenn $\text{ord}_0 f_1 \geq 0$, da f_1 dann elliptisch und holomorph ist und damit konstant ist.

In der Laurent-Entwicklung von f_1 tauchen nur Terme z^{2n} auf, d.h. die Terme mit ungeradzahligem Potenzen von z verschwinden. Dies folgt z.B. aus Satz 2.1.19, angewandt auf die gerade Funktion $g = f \cdot z^{2k}$, k so groß, dass g in 0 holomorph ist: $a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\epsilon(0)} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{\nu+1}} d\zeta$ für die Taylorreihe $g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$: für ungerade ν ist der Integrand $h = g z^{-\nu-1}$ gerade und damit ist das Integral in diesem Fall 0: sei $\gamma^+ = \epsilon \exp(i\pi t)$ der obere Halbkreis und $\gamma^-(t) = -\gamma^+(t)$ der untere, so dass $\partial U_\epsilon = \gamma^- \circ \gamma^+$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^-} h(z) dz &= \int_0^1 h(\gamma^-(t)) (\gamma^-)'(t) dt \\ &\stackrel{h \text{ gerade}}{=} - \int_0^1 h(\gamma^+(t)) (\gamma^+)'(t) dt \\ &= - \int_{\gamma^+} h(z) dz. \end{aligned}$$

Sei $b_{-2n} z^{-2n}$ der Term niedrigster Ordnung in der Laurent-Reihe von f_1 um $z = 0$. Dann ist $f_2 := f_1 - b_{-2n} \wp^n$ eine gerade elliptische Funktion. Sie hat auch höchstens in Λ Pole, und $\text{ord}_0 f_2 > \text{ord}_0 f_1$ nach Konstruktion (und da die Laurentreihe für \wp den niedrigsten Koeffizienten 1 hat, siehe (2.5.25)). Durch Induktion nach $\text{ord}_0 f_1$ erhalten wir die Behauptung. \square

2.5.2 Berechnung von uneigentlichen Integralen

Eine Anwendung des Residuensatzes, deren Bedeutung über die Funktionentheorie hinausgeht ist die Berechnung von uneigentlichen Integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Satz 2.5.26. *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, welches $\overline{\mathbf{H}}$ enthält und sei $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ eine meromorphe Funktion, die nur endlich viele Pole z_1, \dots, z_n hat, die außerdem alle in \mathbf{H} liegen. Sei $\gamma_R(t) = R \exp(i\pi t)$. Wir nehmen an, dass*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0 \tag{2.5.27}$$

gilt und nehmen außerdem an, dass

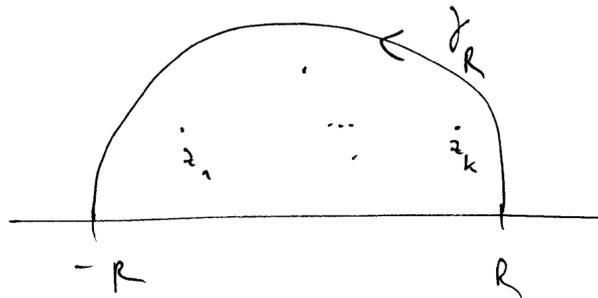
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

existiert (zur Erinnerung, dies bedeutet, dass beide Limites $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx$ und $\lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^0 f(x) dx$ existieren.) Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}_{z_k} f.$$

Beweis. Für $R \gg 0$ (mindestens so groß, dass alle z_k im Innern von $\gamma_R \circ [-R, R]$ liegen) gilt nach dem Residuensatz (Theorem 2.5.11)

$$\int_{-R}^R f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{res}_{z_k} f.$$

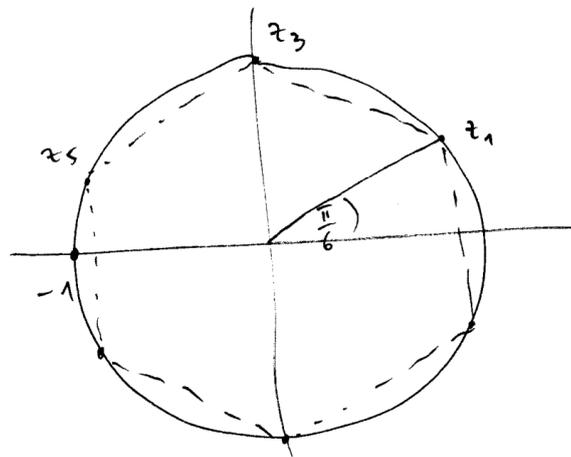


Bilden wir $\lim_{R \rightarrow \infty}$, erhalten wir die Behauptung. □

Beispiel 2.5.28. Seien $p, q \in \mathbf{C}[z]$ zwei Polynome mit $\deg Q \geq \deg P + 2$. Wir nehmen an, dass die Nullstellen z_1, \dots, z_n alle nicht reell sind. Für genügend kleines $\epsilon > 0$ ist $f(z) := p(z)/q(z)$ auf $G := \mathbf{H} - \epsilon = \{z : \text{im}(z) > -\epsilon\}$ meromorph und hat nur Pole in \mathbf{H} . Außerdem ist die Voraussetzung (2.5.27) erfüllt, und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existiert. Es gilt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \text{res}_{z_k} f.$$

Beispiel 2.5.29. Wir betrachten einen Spezialfall von Beispiel 2.5.28: $p = 1$ und $q = z^6 + 1$. Die Nullstellen von q in \mathbf{H} sind $z_k = \exp(k\pi i/6)$, $k = 1, 3, 5$.



Das Residuum von $1/q$ bei z_k berechnet sich als

$$\text{res}_{z_k}(1/q) = \frac{1}{6z_k^5} = -\frac{z_k}{6}.$$

(Hier verwenden wir die Rechenregel $\text{res}(f/g) = f/g'$ für $\text{ord} f \geq 0$ und $\text{ord} g = 1$; angewandt auf $f = (z - z_k)^{-5}$, $g = \frac{(z - z_k)^6 + 1}{(z - z_k)^5}$.) Wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^6} dx = -\frac{1}{3}\pi i (z_1 + z_3 + z_5) = \frac{1}{3}\pi i \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

2.6 Der Riemannsche Abbildungssatz

Sei

$$D := U_1(0) = \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}$$

der offene Einheitsball. Das Ziel in diesem Abschnitt ist folgendes

Theorem 2.6.1. (Riemannscher Abbildungssatz) Sei $G \subsetneq \mathbf{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung (Definition 2.3.3)

$$F : G \rightarrow D.$$

Bemerkung 2.6.2. Die Bedingung $G \subsetneq \mathbf{C}$ (d.h. $G \neq \mathbf{C}$) ist wichtig, denn es gibt keine biholomorphe Abbildung $\mathbf{C} \rightarrow D$ (Beispiel 2.3.4).

Indem man zeigt, dass jede biholomorphe Abbildung $f : D \rightarrow D$ mit $f(0) = 0$ eine Rotation sein muss (d.h. $z \mapsto ze^{it}$, $t \in \mathbf{R}$), kann man außerdem zeigen, dass F eindeutig ist, wenn wir für gegebenes $z_0 \in G$ fordern, dass $F(z_0) = 0$ und $F'(z_0) \in \mathbf{R}^{>0}$ gilt.

Im Beweis des Riemannsches Abbildungssatzes werden wir folgende Halbstetigkeitsaussage verwenden. Wir setzen für eine holomorphe Funktion f auf G und $w \in \mathbf{C}$:

$$N_f(w) = \sum_{z \in f^{-1}(w)} \text{ord}_z(f(z) - w) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}.$$

Lemma 2.6.3. *Sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen auf G , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert.*

- (i) *Angenommen, für $k \in \mathbf{N}$ und $w \in \mathbf{C}$ ist $N_{f_n}(w) \leq k$ für alle n . Dann ist entweder $f = \text{const} = w$ oder $N_f(w) \leq k$.*
- (ii) *Wenn die f_n injektiv sind, so ist f entweder konstant oder auch injektiv.*

Beweis. (i): Der Satz von Weierstraß (Folgerung 2.4.1) besagt, dass f holomorph ist. Sei o.E. $w = 0$ und nehmen wir an $f \neq 0$. Die Nullstellenmenge $Z := f^{-1}(0) \subset G$ ist nach dem Identitätssatz (Theorem 2.3.1) diskret. Angenommen es gibt $z_1, \dots, z_m \in Z$ mit $\sum_i \text{ord}_{z_i} f > k$. Wegen der Diskretheit von Z ist für genügend kleines δ ist für $D_i := U_\delta(z_i)$ in $D_i \cap Z$ nur ein Element, nämlich z_i , enthalten. Es gibt ein $\epsilon > 0$ und $n \gg 0$ mit

$$|f(z) - f_n(z)| < \epsilon < |f(z)|$$

für $z \in \partial D := \bigcup_i \partial D_i$: das rechte “<” folgt wegen Kompaktheit von ∂D und das linke “<” wegen der lokal gleichmäßigen, also auf ∂D gleichmäßigen Konvergenz von $f_n \rightarrow f$. Aus dem Satz von Rouché (Folgerung 2.5.15) erhalten wir dass f_n und f in $\bigcup_i D_i$ gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheit) haben, und damit einen Widerspruch zur Annahme.

(ii): Sei $a \in G$. Wir wenden (i) auf die Folge

$$g_{n,a} : G \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{C}, z \mapsto f_n(z) - f_n(a)$$

an. Da f_n injektiv ist, gilt $N_{g_n}(0) = 0$ und damit ist $g_a := \lim g_{n,a} = f - f(a)$ entweder konstant = 0 (d.h. $f = a$) oder hat keine Nullstelle (auf $G \setminus \{a\}$). Dies gilt für alle $a \in G$, d.h. f ist entweder konstant oder injektiv. \square

Beweis von Theorem 2.6.1. 1. Wir zeigen zunächst, dass G biholomorph zu einer offenen Teilmenge von $0 \in U \subset D$ ist. Nach Voraussetzung gibt es $\alpha \in \mathbf{C} \setminus G$, o.E. $\alpha = 0$. Da G einfach zusammenhängend ist, gibt es $\text{Log}(z) \in \mathcal{O}(G)$ mit $\exp(\text{Log}(z)) = z$:

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \text{Log} \swarrow & \downarrow & \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{\exp} & \mathbf{C}^\times \end{array} \quad \text{ist isomorph zu} \quad \begin{array}{ccc} & G & \\ \swarrow & \downarrow & \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{\text{proj}} & \mathbf{C}/2\pi i\mathbf{Z} \end{array}$$

Sei $w \in G$ beliebig. Es gibt $\epsilon > 0$ so dass

$$U_\epsilon(\text{Log}(w) + 2\pi i) \cap \text{Log}(G) = \emptyset.$$

Andernfalls gäbe es eine Folge $(z_n) \subset G$ mit $\lim \text{Log}(z_n) = \text{Log}(w) + 2\pi i$. Wenden wir die stetige Funktion \exp an, erhalten wir $\lim z_n = w$ und daraus mit der Stetigkeit von Log einen Widerspruch:

$$\text{Log}(w) + 2\pi i = \lim \text{Log}(z_n) = \text{Log}(w).$$

Die Funktion

$$F : G \rightarrow \mathbf{C}, F(z) = \frac{1}{\text{Log}(z) - \text{Log}(w) - 2\pi i}$$

ist also wohldefiniert. Sie ist injektiv, da Log injektiv ist, da die Inklusion $G \subset \mathbf{C}^\times$ injektiv ist. Also ist F nicht konstant, demnach offen (Folgerung 2.3.7), also eine biholomorphe Abbildung $F : G \rightarrow F(G)$.

Daher ist $|F(z)| \leq 1/\epsilon$ für $z \in G$, d.h. $F(G)$ ist beschränkt. Durch Verschieben und Reskalieren erhalten wir die Behauptung.

2. Wir dürfen nun annehmen, dass $0 \in G \subset D$. Sei

$$A := \{f : G \rightarrow D, \text{holomorph, injektiv und } f(0) = 0\}.$$

Unser Ziel ist $f \in A$ zu finden, so dass $|f'(0)|$ maximal wird.

Es gilt $\text{id} \in A$, insbes. $A \neq \emptyset$. Die Familie A ist außerdem gleichmäßig beschränkt (Definition 2.4.2), da die Funktionen in A nur beschränkte Werte annehmen. Nach (2.1.18) gibt es also eine Konstante $C > 0$ so dass $|f'(0)| < C$ für alle $f \in A$, d.h.

$$s := \sup_{f \in A} |f'(0)| \leq C < \infty.$$

Wir werden zeigen, dass es $f \in A$ gibt mit $|f'(0)| = s$. Wähle hierzu eine Folge $(f_n) \in A$ mit $\lim |f'_n(0)| = s$. Wir wenden den Satz von Montel (Satz 2.4.3) auf die uniform beschränkte Familie A an und erhalten eine Teilfolge f_{n_k} , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ konvergiert. Nach dem Satz von Weierstraß (Folgerung 2.4.1) ist f ebenfalls holomorph und $\lim_k f'_{n_k} = f'$. Also gilt $|f'(0)| = s$. Es gilt $s \geq 1$ (da $\text{id} \in A$) und daher ist $f \neq \text{const}$. Es gilt $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in G$. Aus dem Maximumsprinzip (Folgerung 2.3.8) folgt schon $f(z) < 1$. Außerdem gilt offenbar $f(0) = 0$. Schließlich folgt aus Lemma 2.6.3(ii), dass f injektiv ist.

Insgesamt gilt $f \in A$.

3. Wir zeigen nun, dass f auch surjektiv ist, damit ist f eine biholomorphe Abbildung. Angenommen, es gibt $\alpha \in D \setminus f(G)$. Man prüft mit einer expliziten Rechnung, dass $\psi_\alpha(z) := \frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}$ D auf D abbildet, holomorph ist und dass $\psi_\alpha \circ \psi_\alpha = \text{id}$ ist (Übungsaufgabe), d.h. ψ_α ist ein Automorphismus von D . Also ist $G' := \psi_\alpha(f(G))$ einfach zusammenhängend, $0 \notin G'$. Nach Beispiel 2.2.14 gibt es also auf G' eine Wurzel, d.h. $g : G' \rightarrow D$ holomorph mit $g(z)^2 = z$. Sei $\beta := g(\alpha)$, $r := |\alpha| < 1$. Die Funktion

$$F := \psi_\beta \circ g \circ \psi_\alpha \circ f : G \rightarrow D$$

ist holomorph, injektiv und erfüllt $F(0) = 0$, d.h. $F \in A$. Es gilt $\psi'_\alpha(z) = \frac{(-1)(1-\bar{\alpha}z) - (\alpha-z)(-\bar{\alpha})}{(1-\bar{\alpha}z)^2} = \frac{\bar{\alpha}\alpha-1}{(1-\bar{\alpha}z)^2}$. Hieraus folgt

$$|F'(0)| = \underbrace{|\psi'_\beta(\beta)g'(\alpha)\psi'_\alpha(0)|}_{\frac{r+1}{2\sqrt{r}} > 1 \text{ wegen } r < 1} |f'(0)| > |f'(0)|,$$

(benutze $|\psi'_\beta(\beta)g'(\alpha)\psi'_\alpha(0)| = \left| \frac{\bar{\beta}\beta-1}{(1-\bar{\beta}\beta)^2} \right| \left| \frac{1}{2\sqrt{|\alpha|}} \right| |(\alpha\bar{\alpha}-1)| = \frac{|\alpha|^2-1}{2\sqrt{|\alpha|}(|\alpha|-1)} = \frac{r+1}{2\sqrt{r}}$), im Widerspruch zur Maximalität von $|f'(0)|$. □

2.7 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 2.7.1. Sei $U \subseteq \mathbf{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ eine Abbildung. Zeige, dass für jedes $z_0 \in U$ die folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Der Limes

$$f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h},$$

existiert, d.h. f ist in z_0 holomorph.

2. Es gibt eine \mathbf{C} -lineare Abbildung $Df(z_0) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ mit der Eigenschaft:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - Df(z_0)(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

3. Die Abbildung f ist reell differenzierbar (als Abbildung $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$), d.h. es gibt eine \mathbf{R} -lineare Abbildung $Df(z_0) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ mit der Eigenschaft:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - Df(z_0)(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0$$

und f erfüllt die *Cauchy-Riemann Gleichungen*:

$$\frac{\partial \text{Re}(f)}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \text{Im}(f)}{\partial y}(z_0), \quad \frac{\partial \text{Im}(f)}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial \text{Re}(f)}{\partial y}(z_0).$$

Diskutiere die drei Bedingungen kurz am Beispiel der (nicht holomorphen) Funktion $z = x + iy \mapsto \bar{z} (= x - iy)$.

Übungsaufgabe 2.7.2. Sei $G \subseteq \mathbf{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph. Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. f ist konstant

2. $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$.
3. $\operatorname{Re}(f) : G \rightarrow \mathbf{R}$ ist konstant.

Übungsaufgabe 2.7.3. Die Funktion

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist unendlich oft (reell) differenzierbar, es gilt jedoch $f^{(\nu)}(0) = 0$ für alle $\nu \geq 0$. Insbesondere ist f nicht (reell) analytisch.

Übungsaufgabe 2.7.4. Sei $f(z) = \bar{z}$, oder $\Re(z)$ oder $\Im(z)$. Zeige für einen (bequemerweise stückweise linearen) geschlossenen Weg γ dass $\int_{\gamma} f(z) dz \neq 0$ gilt.

Übungsaufgabe 2.7.5. Sei $\gamma(t) = \exp(2\pi it)$, $n \in \mathbf{Z}$. Zeige

$$\int_{\gamma} z^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}.$$

Übungsaufgabe 2.7.6. Zeige, dass die sog. *Cayley-Abbildung*

$$f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D} := \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}, \quad f(z) := \frac{z - i}{z + i}$$

mit inverser Abbildung

$$g(w) := i \frac{1 + w}{1 - w},$$

ein Biholomorphismus zwischen \mathbb{H} und \mathbb{D} ist.

Übungsaufgabe 2.7.7. Folgere aus (2.1.18): sei $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph und erfülle, für ein $n \in \mathbf{N}$,

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|^n)$$

für eine Konstante $C \in \mathbf{R}$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Für $n = 0$ erhalten wir den *Satz von Liouville*: eine beschränkte holomorphe Funktion $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ ist konstant.

Folgere den *Fundamentalsatz der Algebra*: jedes nicht-konstante Polynom $P(z) \in \mathbf{C}[z]$ hat eine Nullstelle. (Tipp: wende den Satz von Liouville auf $1/P$ an.)

Übungsaufgabe 2.7.8. (i) Sei $X = \mathbf{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, wobei die z_i paarweise verschieden sind. Sei $x \neq z_i$ und sei γ_i ein Weg mit $\gamma_i(0) = \gamma_i(1) = x$, der z_i einmal umläuft und ansonsten kein anderes z_j umläuft. Zeige mit Hilfe des Cauchy-Integralsatzes, dass γ_i nicht homotop zu γ_j ist für $i \neq j$.

(ii) Zeige, dass die Relation “ γ_0 ist homotop zu γ_1 ” eine Äquivalenzrelation (von Wegen, deren Anfangs- bzw. Endpunkt übereinstimmt) ist.

(iii) Für einen topologischen Raum X und einen fixierten Punkt $x \in X$ sei

$$\pi_1(X, x)$$

die Menge der Homotopieklassen von geschlossenen Wegen mit Anfangspunkt x . Zeige, dass die Verknüpfung und Invertierung von Wegen (siehe Definition 2.1.7) eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x)$ induziert.

Man bezeichnet $\pi_1(X, x)$ als *Fundamentalgruppe* oder auch *erste Homotopiegruppe*.

Die Übungsaufgabe zeigt also, dass $\pi_1(\mathbf{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}, x)$ mindestens n Elemente enthält. Mit mehr Techniken der algebraischen Topologie kann man zeigen, dass diese Elemente die Gruppe frei erzeugen, d.h. $\pi_1(\mathbf{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}, x)$ ist die freie Gruppe in n Erzeugern. ■

Übungsaufgabe 2.7.9. Sei X ein topologischer Raum. Betrachte die beiden Bedingungen:

- (i) X ist wegzusammenhängend
- (ii) X ist *zusammenhängend*, d.h. für jede disjunkte Zerlegung $X = X_1 \sqcup X_2$ in zwei offene Teilmengen gilt $X_1 = \emptyset$ oder $X_2 = \emptyset$.

Zeige: (i) impliziert (ii). Zeige, dass die Umkehrung gilt, falls X eine Teilmenge von \mathbf{C} ist oder allgemeiner, falls X lokal wegzusammenhängend ist (d.h. jeder Punkt hat eine offene, wegzusammenhängende Umgebung).

Übungsaufgabe 2.7.10. a.) Zeige: für $|z - 1| < 1$ ist die Funktion

$$\operatorname{Log} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z - 1)^n$$

eine holomorphe Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z}$.

b.) Sei $G \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph mit $|f(z) - 1| < 1$ für $z \in G$. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ in G :

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

Übungsaufgabe 2.7.11. Zeige, dass die Funktionen (jeweils definiert auf \mathbf{C}^{\times}) eine hebbare Singularität, bzw. einen Pol 1. Ordnung bzw. eine wesentliche Singularität haben:

$$\frac{\sin z}{z}, \frac{\exp z}{z}, \exp(1/z).$$

Hierbei sind $\exp z := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^{\nu}$ und $\sin z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)!} z^{2\nu+1}$ definiert.

Übungsaufgabe 2.7.12. Wir definieren die *Gammafunktion* als:

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{(z-1)} e^{-t} dt, \text{ für } \Re z > 0.$$

wobei $t^{z-1} := \exp((z-1) \log t)$ mit dem (reellen) Logarithmus $\log t \in \mathbf{R}$.

1. Zeige, dass

$$f_n(z) := \int_{1/n}^n t^{(z-1)} e^{-t} dt,$$

für alle $n \in \mathbf{N}$ und $\Re(z) > 0$ holomorph ist.

2. Folgere aus der Abschätzung

$$|t^{(z-1)} e^{-t}| < t^{\Re(z)-1} \text{ für } t > 0,$$

dass $f_n(z)$ auf $\{z \in \mathbf{C}, \Re(z) > 0\}$ lokal gleichmäßig gegen $\Gamma(z)$ konvergiert. Nach dem Satz von Weierstraß ist Γ auf $\{z \in \mathbf{C}, \Re(z) > 0\}$ also eine holomorphe Funktion.

3. Zeige, dass die Gammafunktion der folgenden Funktionalgleichung genügt:

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \text{ für } \Re(z) > 0,$$

und allgemeiner für $n = 1, 2, \dots$:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)} \text{ für } \Re(z) > 0.$$

4. Zeige, dass es genau eine holomorphe Funktion

$$\Gamma : \mathbf{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbf{C}$$

gibt, die für $\Re(z) > 0$ mit der oben definierten Funktion $\Gamma(z)$ übereinstimmt. Das hier angewandte Prinzip, d.h. ausgehend von einer holomorphen (oder allgemeiner meromorphen Funktion) $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ eine holomorphe Funktion $\hat{f} : \hat{U} \rightarrow \mathbf{C}$ zu konstruieren, die auf einem größeren Definitionsbereich $\hat{U} \supset U$ definiert ist und auf U mit f übereinstimmt, nennt man *analytische Fortsetzung*.

Übungsaufgabe 2.7.13. Seien $f, g : G \rightarrow \mathbf{C}$ zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet G derart, dass $f(z)g(z) = 0$ für alle $z \in G$. Zeige, dass dann $f(z) = 0$ oder $g(z) = 0$ für alle $z \in G$.

Der Ring $\mathcal{O}(G)$ der holomorphen Funktionen hat also keine *Nullteiler*.

Übungsaufgabe 2.7.14. Sei $z \in U$. Der *Ring der Halme* holomorpher Funktionen \mathcal{O}_z ist definiert als

$$\mathcal{O}_z := \bigsqcup_{z \in U' \subset U} \mathcal{O}(U') / \sim,$$

wobei die disjunkte Vereinigung über alle offenen Umgebungen U' läuft und die Äquivalenzrelation \sim gegeben ist durch $f_1 \in \mathcal{O}(U'_1)$, $f_2 \in \mathcal{O}(U'_2)$ sind äquivalent, wenn

$$(f_1)|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}.$$

Anschaulich ist ein Halm eine holomorphe Funktion, die auf einer offenen Umgebung von z definiert ist, wobei zwei solche Funktionen miteinander identifiziert werden, wenn sie auf einer evtl. kleineren Umgebung übereinstimmen. (In der Sprache der Kategorientheorie ist

$$\mathcal{O}_z := \operatorname{colim}_{z \in U' \subset U} \mathcal{O}(U')$$

der direkte Limes (oder auch filtrierte Kolimes) der $\mathcal{O}(U')$.) Analog definieren wir \mathcal{M}_z indem wir oben $\mathcal{O}(U')$ durch $\mathcal{M}(U')$ ersetzen.

Zeige:

1. \mathcal{O}_z ist ein kommutativer Ring (eine Skizze der Ringaxiome genügt).
2. \mathcal{O}_z hat keine Nullteiler (benutze Übungsaufgabe 2.7.13) und \mathcal{M}_z ist der Quotientenkörper von \mathcal{O}_z .
3. $\operatorname{ord}_z : \mathcal{M}(U) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{Z}$ faktorisiert eindeutig über einen Gruppenhomomorphismus $\operatorname{ord}_z : \mathcal{M}_z \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{Z}$.
4. Versuchen mit dieser Bewertung ist \mathcal{O}_z ein *diskreter Bewertungsring*, d.h. ein Element $f \in \mathcal{M}_z \setminus \{0\}$ ist genau dann in \mathcal{O}_z , wenn $\operatorname{ord}_z f \geq 0$ gilt.

Übungsaufgabe 2.7.15. Berechne

$$\int_0^\infty \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt.$$

Übungsaufgabe 2.7.16. Sei $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ die 2-Sphäre, $N := (0, 0, 1) \in S^2$ der Nordpol. Wir versehen S^2 mit folgender Karte (die *stereographische Projektion*)

$$6S : S^2 \setminus N \rightarrow \mathbf{C}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z}$$

und einer analogen Karte für $S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$. Zeige, dass diese beiden Karten eine komplexe Struktur auf S^2 definieren und S^2 damit zu einer Riemannschen Fläche machen. Zeige ferner, dass der Homöomorphismus

$$\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow S^2$$

der durch die stereographische Projektion gegeben wird, eine biholomorphe Abbildung ist.

Tipp: Die Umkehrabbildung der stereographischen Projektion ist gegeben durch

$$S^{-1} : \mathbf{C} \rightarrow S^2 \setminus N, \quad u + iv \mapsto \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2} \right).$$

Kapitel 3

Riemannsche Flächen

3.1 Definitionen und erste Eigenschaften

Wir haben nun genug Werkzeuge für das Studium Riemannscher Flächen. Wir beginnen damit, Eigenschaften holomorpher und meromorpher Funktionen auf Gebieten zu übertragen.

Definition 3.1.1. Eine *topologische Mannigfaltigkeit* oder auch kurz *Mannigfaltigkeit* X der Dimension n ist ein topologischer Hausdorff-Raum, so dass jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die zu einer offenen Teilmenge des \mathbf{R}^n homöomorph ist.

Definition 3.1.2. Sei X eine 2-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit.

Eine *komplexe Karte* ist ein Homöomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$, wobei $U \subset X$ offen und $V \subset \mathbf{C}$ offen ist.

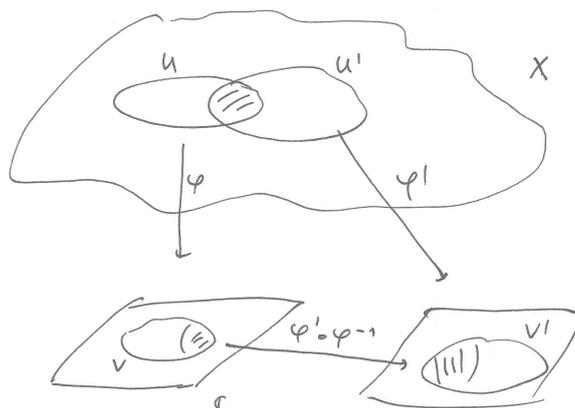
Eine *komplexe Struktur* Σ auf einer 2-dimensionalen (topologischen) Mannigfaltigkeit X ist eine Menge von Karten

$$\Sigma = \{\varphi : U \rightarrow V, \}$$

deren Definitionsbereiche X überdecken (d.h. $X = \bigcup_{\varphi \in \Sigma} U$) und derart dass für je zwei Karten $\varphi : U \rightarrow V$ und $\varphi' : U' \rightarrow V'$ mit $U \cap U' \neq \emptyset$ gilt: die Abbildung

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$$

ist holomorph im Sinne von Definition 1.0.1. (Beachte hierzu, dass beide Mengen offene Teilmengen von \mathbf{C} sind, da φ, φ' Homöomorphismen sind).

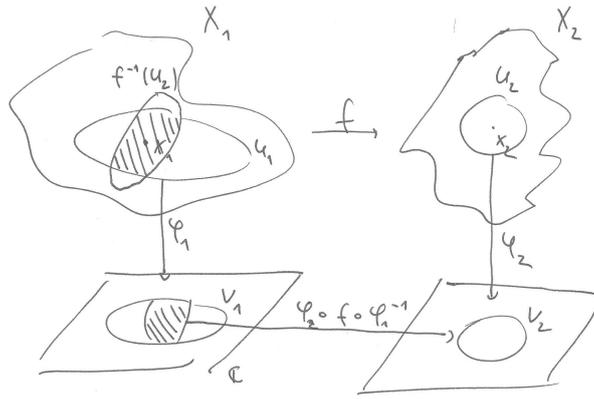


Eine *Riemannsche Fläche* ist das Datum (X, Σ) bestehend aus einer zusammenhängenden 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit und einer komplexen Struktur Σ auf X . Falls Σ klar ist, schreiben wir auch nur X .

Eine *holomorphe Abbildung* $f : (X_1, \Sigma_1) \rightarrow (X_2, \Sigma_2)$ (oder kurz $f : X_1 \rightarrow X_2$) ist eine stetige Abbildung $f : X_1 \rightarrow X_2$ so dass für jede Karte $\varphi_1 \in \Sigma_1$ und $\varphi_2 \in \Sigma_2$ gilt: die Abbildung

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(f^{-1}(U_2) \cap U_1) \rightarrow U_2$$

ist holomorph. (Beachte wiederum: beide Mengen sind offene Teilmengen von \mathbf{C} , da f stetig und φ_1 eine offene Abbildung ist). Wir bezeichnen die Menge der holomorphen Abbildungen mit $\text{Hom}((X_1, \Sigma_1), (X_2, \Sigma_2))$ oder auch $\text{Hom}(X_1, X_2)$.



Eine *biholomorphe* Abbildung $f : X_1 \rightarrow X_2$ ist eine holomorphe Abbildung, so dass es eine holomorphe Abbildung $g : X_2 \rightarrow X_1$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_{X_2}$ und $g \circ f = \text{id}_{X_1}$.

Bemerkung 3.1.3. Falls $(X_1, \Sigma_1) \xrightarrow{f_1} (X_2, \Sigma_2) \xrightarrow{f_2} (X_3, \Sigma_3)$ holomorphe Abbildungen sind, so ist auch $f_2 \circ f_1$ holomorph. Dies folgt sofort aus der Definition und der analogen Tatsache über holomorphe Abbildungen zwischen offenen Teilmengen in \mathbf{C} .

Riemannsche Flächen bilden daher eine Kategorie; biholomorphe Abbildungen sind gerade die Isomorphismen in dieser Kategorie.

Notation 3.1.4. Sei im folgenden (X, Σ) oder kürzer X stets eine Riemannsche Fläche. Außerdem sei U stets eine offene Teilmenge von X .

Beispiel 3.1.5. \mathbf{C} und allgemeiner jedes Gebiet $G \subset \mathbf{C}$ sind Riemannsche Flächen, die wir stets mit der Standardstruktur $\varphi = \text{incl} : G \rightarrow \mathbf{C}$ ausstatten.

Allgemeiner, falls (X, Σ) eine Riemannsche Fläche ist und $W \subset X$ offen, dann wird W zu einer Riemannschen Fläche, die wir stets mit der komplexen Struktur $\{\varphi|_{W \cap U} : W \cap U \rightarrow \varphi(W \cap U) \mid (\varphi : U \rightarrow V) \in \Sigma\}$ ausstatten.

Eine holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow \mathbf{C}$ nennen wir auch *holomorphe Funktion*. Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{O}(X)$. Mit der punktweisen Addition und Multiplikation wird $\mathcal{O}(X)$ zu einer \mathbf{C} -Algebra.

Definition und Lemma 3.1.6. Die *projektive Gerade* \mathbf{P}^1 ist definiert als

$$\mathbf{P}^1 = U_1 \sqcup U_2 / \sim,$$

wobei $U_1 = \mathbf{C}, U_2 = \mathbf{C}$ und \sim bedeutet, dass wir jedes Element $z \in U_1 \setminus \{0\}$ mit $1/z \in U_2$ identifizieren.

Die Topologie auf \mathbf{P}^1 wird so definiert, dass eine Teilmenge $U \subset \mathbf{P}^1$ offen ist, genau dann wenn $\pi^{-1}(U)$ offen ist, wobei $\pi : U_1 \sqcup U_2 \rightarrow \mathbf{P}^1$ die kanonische Abbildung ist.

Wir versehen \mathbf{P}^1 mit den beiden Karten $\varphi_1 := \text{id} : U_1 \rightarrow \mathbf{C}$ und $\varphi_2 := \text{id} : U_2 \rightarrow \mathbf{C}$. Das Bild von $0 \in U_2$ in \mathbf{P}^1 wird mit ∞ oder *Punkt im Unendlichen* bezeichnet. Dies definiert eine kompakte Riemannsche Fläche.

Beweis. Die Übergangsabbildung

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbf{C}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times = \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

ist gegeben durch $z \mapsto z^{-1}$. Diese ist biholomorph (d.h. auch $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ ist holomorph.) Außerdem sehen wir hieran, dass $U_r(0) \setminus \{0\} \subset U_1$ mit $\{z \in U_2, |z| > 1/r\}$ identifiziert wird. Hieran sieht man leicht, dass \mathbf{P}^1 Hausdorffsch ist. Für die Kompaktheit sei $\mathbf{P}^1 = \bigcup_i V_i$ eine offene Überdeckung. Sei $\infty \in V_0$, ohne Einschränkung $\pi^{-1}(V_0) = U_r(0) \subset U_2$. Dann wird $V_0 \setminus \{\infty\}$ mit $\{z \in U_1, |z| < 1/r\}$ identifiziert, dessen Komplement $\overline{U_{1/r}(0)}$ ist kompakt und damit genügen V_0 und endlich viele der übrigen V_i , um \mathbf{P}^1 zu überdecken. \square

Beispiel 3.1.7. Sei $\Lambda = \mathbf{Z}\omega_1 \oplus \mathbf{Z}\omega_2$ ein Gitter (Notation 2.5.16), d.h. ω_1, ω_2 sind \mathbf{R} -linear unabhängig. Sei $P = \{r_1\omega_1 + r_2\omega_2, 0 \leq r_1, r_2 < 1\}$ das Periodenparallelogramm.

Wir werden nun

$$X := \mathbf{C}/\Lambda$$

zu einer kompakten Riemannschen Fläche machen so dass die kanonische Projektion

$$\pi : \mathbf{C} \rightarrow X$$

holomorph ist. Man nennt X eine *elliptische Kurve*. (Der Name rührt von Betrachtungen zu Bogenlängen von Ellipsen her, hat aber ansonsten nichts mit Ellipsen zu tun.)

Außerdem zeigen wir, dass für jede Riemannsche Fläche Y gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(X, Y) &\longrightarrow \{f \in \text{Hom}(\mathbf{C}, Y), f(z + \lambda) = f(z) \forall z \in \mathbf{C}, \lambda \in \Lambda\} \\ g &\mapsto \pi^*g := g \circ \pi. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

- Wir versehen X mit der *Quotiententopologie*, d.h. $U \subset X$ ist nach Definition offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subset \mathbf{C}$ offen ist. (Äquivalent hierzu: X trägt die eindeutige Topologie bezüglich derer π stetig ist.)
- π ist offen, denn für $V \subset \mathbf{C}$ offen ist $\pi^{-1}\pi(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \lambda + V$ offen.
- X ist Hausdorffsch: da ω_1, ω_2 ein Gitter aufspannen, gibt es $\epsilon > 0$, so dass π eingeschränkt auf $U_\epsilon(z)$ bijektiv und damit nach den beiden vorherigen Punkten ein Homöomorphismus ist.
- $X = \pi(\overline{P})$ ist als Bild eines kompakten Raums ebenfalls kompakt.
- Wir betrachten die komplexe Struktur, die aus folgenden Karten besteht: $U \subset X$ offen und von der Form $U = \pi(V)$ mit $V \subset \mathbf{C}$ offen und derart, dass $\pi : V \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist (dies tritt genau dann ein, wenn $V \subset P + \lambda$ für ein fixiertes $\lambda \in \Lambda$). Die Abbildungen $\varphi := \pi^{-1} : U \rightarrow V$ sind dann nach Definition die Karten der komplexen Struktur von X .

Um zu sehen, dass dies in der Tat eine Riemannsche Fläche definiert, betrachte eine weitere solche Karte $\varphi' : U' \rightarrow V'$. Dann ist die Übergangsabbildung

$$\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U').$$

Es gilt $\pi(\psi(z)) = \varphi^{-1}(z) = \pi(z)$, d.h. $\psi(z) - z \in \Lambda$. Da Λ diskret ist, folgt dass $\psi(z) - z$ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\varphi(U \cap U')$ konstant ist. Insbesondere ist ψ holomorph, d.h. wir haben in der Tat eine komplexe Struktur definiert.

- Die Abbildung in (3.1.8) ist sicher injektiv. Falls $f \in \text{Hom}(\mathbf{C}, Y)$ die Bedingung $f(z + \lambda) = f(z)$ erfüllt, gibt es genau eine Abbildung (von Mengen) $g : X \rightarrow Y$ mit $\pi^*g = f$. Um zu sehen, dass g holomorph ist, wenden wir die Definition an, wobei die Karte $\varphi : U \rightarrow V$ wie oben definiert ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{\pi} & X & \xrightarrow{g} & Y \\ \\ \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi} & U \\ & \cong \downarrow \varphi & \\ & & V \end{array} & \supset & \begin{array}{ccc} U \cap f^{-1}(\tilde{U}) & \longrightarrow & \tilde{U} \\ & \cong \downarrow \varphi & \\ & & \varphi(U \cap f^{-1}(\tilde{U})) \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{ccc} \tilde{V} & & \\ & \cong \downarrow \tilde{\varphi} & \\ & & \tilde{V} \end{array} \end{array}$$

g ist holomorph wenn, $\varphi(U \cap f^{-1}(\tilde{U})) \rightarrow \tilde{V}$ holomorph ist, dies ist äquivalent dazu, dass $f|_V$ holomorph ist.

Die Tatsachen über holomorphe Funktionen auf $U \subset \mathbf{C}$, die wir kennen, setzen sich nun auf holomorphe Abbildungen auf Riemannschen Flächen fort:

Theorem 3.1.9. *Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f, g : X \rightarrow Y$ holomorph.*

- (i) (Identitätssatz) *Wenn es eine Folge (x_n) paarweise verschiedener Elemente in X , die gegen ein $x \in X$ konvergieren, so dass $f(x_n) = g(x_n)$ für alle n , dann gilt $f = g$.*
- (ii) (Lokale Gestalt holomorpher Abbildungen) *Sei $x \in X, y := f(x) \in Y$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl $m \geq 0$ sowie Karten φ und φ' , die in folgendes kommutatives Diagramm passen, wobei $\psi : V \rightarrow W$ biholomorph ist:*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ U & \ni & x \xrightarrow{\psi} y & \in & U' \\ \downarrow \varphi \text{ (Karte)} & & \downarrow & & \downarrow \varphi' \text{ (Karte)} \\ V & \ni & 0 & \in & V' \\ & & \downarrow & & \\ & & z \mapsto z^m & & \end{array}$$

- (iii) (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Sei $f : X \setminus \{x\} \rightarrow Y$ holomorph und in einer Umgebung $U \ni x$ beschränkt, d.h. $f(U \setminus \{x\})$ ist, für eine geeignete Karte $V \xrightarrow{\varphi} W \subset \mathbf{C}$, in V enthalten und $\varphi(f(U \setminus \{x\})) \subset \mathbf{C}$ ist beschränkt. Dann gibt es eine eindeutige holomorphe Funktion $\hat{f} : X \rightarrow Y$, die auf $X \setminus \{x\}$ mit f übereinstimmt.*

- (iv) f ist entweder konstant oder offen, d.h. $f(U)$ ist offen für alle offenen $U \subset X$.
- (v) Wenn f injektiv ist, ist $f : X \rightarrow f(X)$ biholomorph.
- (vi) (Maximumsprinzip) Wenn $f : X \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph ist und $|f|$ lokal in einem Punkt $x \in X$ ihr Maximum annimmt, so ist f konstant.
- (vii) (Satz von Liouville) Wenn X kompakt ist und $f : X \rightarrow \mathbf{C}$ holomorph, dann ist f konstant.

Beweis(skizze). (i): wähle eine Karte $f(x) \in U' \xrightarrow{\varphi'} V' \subset \mathbf{C}$ sowie eine Karte $x \in U \xrightarrow{\varphi} V \subset \mathbf{C}$ mit $f(U) \subset U'$ und $g(U) \subset U'$. Für fast alle n ist $x_n \in U$, $f(x_n) \in U'$ (Stetigkeit von f). Die holomorphen Abbildungen $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ und $\varphi' \circ g \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V'$ stimmen auf $\varphi(x_n)$ und $\varphi(x)$, also nach dem gewöhnlichen Identitätssatz (Theorem 2.3.1) auf ganz V überein. Damit stimmen f und g auf U überein.

Für einen beliebigen Punkt $x' \in X$ wählen wir einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ von x nach x' . Sei $t_0 = \inf\{t, f(\gamma(t)) \neq g(\gamma(t))\}$. Es gilt nach dem obigen $t > 0$. Falls diese Menge nicht leer ist, wenden wir das bisher gezeigte auf die Folge $\gamma(t - 1/n)$ an.

(ii): wähle zunächst beliebige Karten (d.h. alles wie in der Behauptung, nur zunächst ohne die Bedingung, dass $z \mapsto z^m$ in das kommutative Diagramm passt). Wende dann Satz 2.3.6 auf die holomorphe Abbildung $r := \varphi' \circ f \circ \varphi : V \rightarrow V'$ an: es gibt $W \subset V$ und $W' \subset V'$ offen und eine biholomorphe Abbildung $\psi : W \rightarrow W'$ so dass $r(w) = \psi(w)^m$ ist. Indem wir die bisherige Karten durch $\psi \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \rightarrow W'$ und $\varphi'|_{\varphi^{-1}(W')}$ ersetzen, erhalten wir die Behauptung.

(vii): $|f| : X \rightarrow \mathbf{R}^{\geq 0}$ nimmt wegen der Kompaktheit von X ihr Maximum an, damit ist f konstant wegen dem Maximumsprinzip.

Der Beweis der übrigen Aussagen ist, natürlich unter Verwendung von Theorem 2.5.3 bzw. Folgerung 2.3.7, eine (noch leichtere) Übungsaufgabe. \square

Wir hatten in Definition 1.0.9 eine meromorphe Funktion f auf X definiert als holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$, die nicht konstant ∞ ist. Bisher hatten wir jedoch meromorphe Funktionen auf Gebieten G definiert (Definition 2.5.4) als holomorphe Funktionen $G \setminus S$, $S \subset G$ diskret, derart dass für jedes $z_0 \in S$ die Funktion $f(z)(z - z_0)^m : G \setminus S \rightarrow \mathbf{C}$ für geeignetes $m \geq 0$ eine hebbare Singularität hat, d.h. sich zu einer holomorphen Funktion auf einer offenen Umgebung von z_0 fortsetzen lässt. Wir zeigen nun, dass diese beiden Definitionen für $X = G$ übereinstimmen.

Lemma 3.1.10. Sei G ein Gebiet. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \{f : G \rightarrow \mathbf{P}^1 \text{ holomorph}, f \neq \infty\} &\rightarrow \{f \text{ meromorph auf } G\} \\ f &\mapsto f|_{G \setminus f^{-1}(\infty)} \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

Beweis. Wir verwenden folgende äquivalente Bedingungen

- (i) f ist eine meromorphe Funktion auf G (im Sinne von Definition 2.5.4)
- (ii) $G = \bigcup_i U_{\epsilon_i}(z_i) =: \bigcup_i U_i$, $f|_{U_i} = (z - z_i)^{m_i} g(z)$ mit $g \in \mathcal{O}^\times(U_i)$ (d.h. g ist auf U_i nirgends 0), $m_i \in \mathbf{Z}$
- (iii) $G = \bigcup_i U_i$ so dass (entspricht $m_i \geq 0$) entweder $f|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}$ eine holomorphe Abbildung oder (entspricht $m_i < 0$) $\frac{1}{f}|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{P}^1 \setminus \{0\}$ eine holomorphe Abbildung ist, $f \neq \infty$ (d.h. $f(z) \neq \infty$ für ein $z \in G$)
- (iv) $G = \bigcup_i U_i$ so dass $f|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbf{P}^1$ holomorph ist, $f \neq \infty$
- (v) $f : G \rightarrow \mathbf{P}^1$ ist holomorph, $f \neq \infty$

Die Implikationen (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) sind ein Spezialfall von Übungsaufgabe 3.2.2, die übrigen klar nach Definition. \square

Definition und Lemma 3.1.11. Die Menge $\mathcal{M}(X)$ der meromorphen Funktionen auf X bildet einen Körper, den sog. *Funktionskörper* von X .

Beweis. Dies folgt aus der analogen Aussage für Gebiete (Lemma 2.5.5) und der Tatsache, dass meromorphe Funktionen (d.h. holomorphe Abbildungen $X \rightarrow \mathbf{P}^1$) lokal definiert werden können, d.h. für eine offene Überdeckung von $X = \bigcup_i U_i$ ist es äquivalent eine holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ zu definieren, oder holomorphe Abbildungen $f_i : U_i \rightarrow \mathbf{P}^1$ zu definieren, die auf $U_i \cap U_j$ übereinstimmen.

Wählen wir die U_i klein genug, so dass sie jeweils via einer Karte $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ homöomorph zu einem Gebiet $V_i \subset \mathbf{C}$ sind. Für $f, g \in \mathcal{M}(X)$ definieren wir $h_i := (f + g)|_{U_i}$ als die eindeutige stetige Abbildung, so dass

$h_i \circ \varphi_i^{-1} : V_i \rightarrow \mathbf{P}^1$ die Summe von $f|_{U_i} \circ \varphi_i^{-1} : V_i \rightarrow \mathbf{P}^1$ (aufgefasst als meromorphe Funktion auf dem Gebiet V_i) und $g|_{U_i} \circ \varphi_i^{-1}$ ist. Dies definiert eine Addition und analog auch Multiplikation. Falls $f \neq 0$, so ist $f|_{U_i} \neq 0$ wegen dem Identitätssatz (Theorem 3.1.9(i)) und damit existiert wiederum analog zum obigen eine eindeutige holomorphe Abbildung $(1/f)|_{U_i}$ und damit $1/f \in \mathcal{M}(X)$. \square

Lemma 3.1.12. *Es gilt*

$$\mathcal{M}(\mathbf{P}^1) = \mathbf{C}(z),$$

der Körper der sog. rationalen Funktionen, d.h. der Quotientenkörper von $\mathbf{C}[z]$. Unter dieser Bijektion wird $\text{id}_{\mathbf{P}^1}$ auf z abgebildet.

Beweis. Sei $f = \sum_{k=0}^n a_k z^k \in \mathbf{C}[z]$. Es definiert eine holomorphe Abbildung $f : \mathbf{C} \rightarrow U_1 = \mathbf{C} \subset \mathbf{P}^1$. (In obiger Notation.) Um zu sehen, dass sie sich zu einer (eindeutigen) holomorphen Abbildung $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ fortsetzt, kann man z.B. den Riemannschen Hebbarkeitssatz (Theorem 3.1.9(iii)) anwenden: wir müssen prüfen, dass $f|_{\mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}}$ in einer Umgebung von ∞ beschränkt ist. Aufgrund der Definition der Karten bedeutet dies: für $|z| > R$ müssen wir prüfen, dass $|f(z)| > R'$ gilt. Dies ist eine elementare Tatsache der (reellen) Analysis.

Wir haben einen Ringhomomorphismus $\mathbf{C}[z] \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{P}^1)$ konstruiert, sie setzt sich auf eine eindeutige Abbildung von Körpern $\mathbf{C}(z) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{P}^1)$ fort, da $\mathcal{M}(\mathbf{P}^1)$ ein Körper ist.

Sei umgekehrt $f \in \mathcal{M}(\mathbf{P}^1)$ eine meromorphe Funktion, d.h. $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ eine holomorphe Abbildung. Dann ist $S = f^{-1}(\infty)$ diskret (Identitätssatz) und wegen der Kompaktheit von \mathbf{P}^1 endlich, sagen wir $S = \{z_1, \dots, z_n\}$. Lokal in einer Karte um z_k gilt $f(z) = \sum_{j=-m_k}^{\infty} a_j (z - z_k)^j$. Die Funktion $g_k(z) := \sum_{j=-m_k}^{-1} a_j (z - z_k)^j$ ist eine meromorphe Funktion auf \mathbf{P}^1 , hat z_k als einzigen Pol und ist in $\mathbf{C}(z)$ enthalten. Außerdem ist $f - \sum_k g_k$ eine auf ganz \mathbf{P}^1 holomorphe Funktion und damit nach dem Satz von Liouville (Theorem 3.1.9(vii)) konstant. \square

Satz 3.1.13. *Für eine elliptische Kurve $X = \mathbf{C}/\Lambda$ (Beispiel 3.1.7) gilt*

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(\Lambda) \cong \mathbf{C}(x)[y]/y^2 - 4x^3 - g_2x - g_3,$$

wobei $\mathcal{M}(\Lambda)$ der Körper der elliptischen Funktionen (bzgl. Λ) ist, $g_2 := 60 \sum' \lambda^{-4} \in \mathbf{C}$ und $g_3 := 140 \sum' \lambda^{-6} \in \mathbf{C}$ sind.

Beweis. Der Isomorphismus auf der rechten Seite ist eine Wiederholung von Theorem 2.5.19. Für den Isomorphismus links beachte

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(X) &:= \{f : X \rightarrow \mathbf{P}^1 \text{ holomorph}\} \\ &= \{f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1 \text{ holomorph}, f(z + \lambda) = f(z) \forall z \in \mathbf{C}, \lambda \in \Lambda\} \text{ nach (3.1.8)} \\ &= \{f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1 \text{ meromorph}, f(z + \lambda) = f(z) \forall z \in \mathbf{C}, \lambda \in \Lambda\} \text{ nach Lemma 3.1.10} \\ &=: \mathcal{M}(\Lambda). \end{aligned}$$

Die letzte Identifikation benutzt, dass eine holomorphe Abbildung $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$ das gleiche ist wie eine meromorphe Funktion auf \mathbf{C} (Lemma 3.1.10). \square

3.2 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 3.2.1. Beweise die fehlenden Aussagen in Theorem 3.1.9.

Übungsaufgabe 3.2.2. Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i) f ist holomorph,
- (ii) es gibt eine offene Überdeckung $X = \bigcup U_i$ so dass die Einschränkung $f|_{U_i} : U_i \rightarrow Y$ holomorph ist,
- (iii) es gibt eine offene Überdeckung $Y = \bigcup V_i$, so dass $f|_{f^{-1}(V_i)} : f^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$ holomorph ist.

Tipp: zeige zunächst, dass die ersten beiden Aussagen äquivalent sind. Für die dritte Aussage betrachte die offene Überdeckung $X = \bigcup_i f^{-1}(V_i)$.

Kapitel 4

Überlagerungstheorie

Der Hauptsatz der Überlagerungstheorie ist folgendes Theorem:

Theorem 4.0.1. Sei Y eine fixierte Riemannsche Fläche und $\mathcal{M}(Y)$ ihr Funktionenkörper. Die Zuordnung

$$\begin{aligned} \{p : X \rightarrow Y \text{ holomorph, eigentlich, nicht konstant}\} &\rightarrow \{\text{endliche Körpererweiterungen } L/\mathcal{M}(Y)\} \\ (p : X \rightarrow Y) &\mapsto (p^* : \mathcal{M}(Y) \rightarrow \mathcal{M}(X)) \end{aligned}$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Der Beweis dieses Theorems wird uns einige Zeit in Anspruch nehmen. Zunächst geht es darum, die Begriffe “eigentlich” und “ p^* ” zu definieren. Später werden wir auch präzisieren, wie die obigen Mengen zu einer Kategorie gemacht werden und was es heißt, eine Äquivalenz von Kategorien zu sein. Im Moment sei nur bemerkt, dass der Beweis des Theorems insbesondere erfordert, dass wir für eine gegebene endliche Körpererweiterung $L/\mathcal{M}(X)$ eine Riemannsche Fläche X und eine (eigentliche, holomorphe, nicht konstante) Abbildung $p : X \rightarrow Y$ konstruieren müssen, so dass $\mathcal{M}(X) \cong L$ gilt.

Wir haben gesehen, dass jeder Riemannschen Fläche X der Funktionenkörper $\mathcal{M}(X)$ zugeordnet werden kann. Für eine nichtkonstante holomorphe Abbildung $p : X \rightarrow Y$ können wir die Abbildung

$$\begin{aligned} p^* : \mathcal{M}(Y) &\rightarrow \mathcal{M}(X) \\ (a : Y \rightarrow \mathbf{P}^1) &\mapsto (a \circ p : X \rightarrow \mathbf{P}^1) \end{aligned}$$

betrachten. (Da $p \neq \text{const}$ ist p offen und damit auch $a \circ p \neq \infty$, andernfalls wäre $a|_{p(X)} : p(X) \rightarrow \mathbf{P}^1$ konstant, aber $p(X)$ ist auch offen in Y , d.h. a wäre konstant nach dem Identitätssatz.) Es handelt sich um einen Homomorphismus von Körpern (die Summe $a + a'$ entspricht, lokal in einer Karte die biholomorph zu einem Gebiet ist, der gewöhnlichen Summe meromorpher Funktionen; analog mit dem Produkt). Wie jeder Homomorphismus zwischen Körpern ist p^* injektiv, d.h. $\mathcal{M}(X)$ wird vermöge p^* zu einer Körpererweiterung von $\mathcal{M}(Y)$.

Beispiel 4.0.2. Für eine elliptische Kurve $X = \mathbf{C}/\Lambda$ und $Y = \mathbf{P}^1$ betrachten wir die Abbildung $p : \mathbf{C}/\Lambda \rightarrow \mathbf{P}^1$, die durch die meromorphe Funktion $\wp \in \mathcal{M}(X) = \text{Hom}(X, \mathbf{P}^1)$ gegeben ist. Sie liefert eine Körpererweiterung

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbf{P}^1) = \mathbf{C}(x) &\rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C}/\Lambda), \\ x &\mapsto \wp. \end{aligned}$$

Definition 4.0.3. Eine Abbildung $p : X \rightarrow Y$ zwischen Riemannschen Flächen (allgemeiner zwischen lokal kompakten Hausdorff-Räumen) heißt *eigentlich*, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset Y$ auch $p^{-1}(K)$ kompakt ist. (Vergleiche dies damit, dass für eine stetige Abbildung p (kompakte Teilmenge von X) stets kompakt ist.)

Beispiel 4.0.4. Falls X kompakt ist, ist jede stetige Abbildung $p : X \rightarrow Y$ eigentlich: $K \subset Y$ kompakt ist automatisch abgeschlossen, jede offene Überdeckung von $p^{-1}(K)$ ist von der Form $p^{-1}(K) = \bigcup_i (U_i \cap p^{-1}(K))$ mit $U_i \subset X$ offen. Es gilt dann $X = X \setminus p^{-1}(K) \cup \bigcup_i U_i$. Wegen der Kompaktheit von X gibt es eine hiervon eine endliche Teilüberdeckung von X und daher auch eine von $p^{-1}(K)$.

Jede eigentliche Abbildung (zwischen lokal kompakten Hausdorff-Räumen) ist *abgeschlossen*, d.h. Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen: dies folgt aus der Tatsache, dass $A \subset X$ abgeschlossen ist genau dann, wenn $A \cap K$ kompakt ist für alle Kompakta $K \subset X$; verwende dann $p(A) \cap K = p(A \cap p^{-1}(K))$.

Die Inklusionen $\mathbf{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{C}$ oder auch $U_1(0) \rightarrow \mathbf{C}$ sind demnach nicht eigentlich.

Lemma 4.0.5. Sei $p : X \rightarrow Y$ eine holomorphe, eigentliche, nicht konstante Abbildung zwischen Riemannschen Flächen.

Dann ist p surjektiv und die Fasern $p^{-1}(y)$ sind endliche Mengen für alle $y \in Y$.

Beweis. Da Y zusammenhängend, $p(X)$ offen (p nicht konstant, Theorem 3.1.9(iv)), andererseits aber auch abgeschlossen ist (da p eigentlich), muss $p(X) = Y$ sein.

Außerdem ist für jedes $y \in Y$ das Urbild $p^{-1}(y)$ diskret (Identitätssatz) und kompakt (da p eigentlich ist), und damit endlich. \square

Definition 4.0.6. Sei $p : X \rightarrow Y$ holomorph und nicht konstant. Nach Theorem 3.1.9(ii) gibt es für jedes $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes $m \geq 1$, so dass p lokal um x biholomorph zu einer Abbildung der Form $z \mapsto z^m$ ist. Wir schreiben $\text{ord}_x p := m$ für diese Zahl. Die Zahl $\text{ord}_x p - 1$ heißt *Verzweigungsindex* von p in x .

Die Punkte in

$$A := \{x \in X, \text{ord}_x p > 1\}$$

heißen *Verzweigungspunkte* von p . Man nennt p *unverzweigt*, falls $A = \emptyset$.

Die Teilmenge $B := p(A)$ heißt Menge der *kritischen Werte* von p .

Bemerkung 4.0.7. Falls p eine holomorphe Funktion zwischen offenen Teilmengen von \mathbf{C} ist, stimmt der soeben definierte Verzweigungsindex mit der Ordnung (Definition 2.5.6) offensichtlich überein: für $p(z) = z^m h(z)$ mit h holomorph, $h(0) \neq 0$ ist m die kleinste Zahl so dass $f^{(m)}(0) \neq 0$. Dies trifft auch für eine Abbildung zu, die biholomorph zu z^m ist, da nach Satz 2.3.5 für biholomorphe Abbildungen q gilt: $q'(0) = q^{(1)}(0) \neq 0$.

Beispiel 4.0.8. • Der Verzweigungsindex von p bei x ist 0 genau dann, wenn p in einer Umgebung von $x \in X$ *injektiv* ist oder auch genau dann, wenn p in einer Umgebung *bijektiv* ist. Dies folgt sofort aus den Definitionen.

- $p : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, z \mapsto z^m$ hat genau einen Verzweigungspunkt, nämlich 0 (es gibt keine Umgebung von 0 auf der p injektiv ist).
- Allgemeiner ist für jede holomorphe Abbildung $p : X \rightarrow Y$ die Menge $A \subset X$ der Verzweigungspunkte eine diskrete Teilmenge, denn $z \mapsto z^k$ ist nur in 0 verzweigt, in allen anderen Punkten jedoch unverzweigt.
- Sowohl $\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^\times$ (welches auch isomorph zur Projektion $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/2\pi i\mathbf{Z}$, siehe Beispiel 2.1.4, ist) als auch $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\Lambda$ (vgl. Notation 2.5.16) sind unverzweigt: in beiden Fällen hat jedes $z \in \mathbf{C}$ eine Umgebung, auf der die Abbildung injektiv ist.

Definition 4.0.9. Eine stetige Abbildung $p : X \rightarrow Y$ von topologischen Räumen heißt *Überlagerung*, wenn sie surjektiv ist und wenn jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung V hat, so dass für die Zerlegung $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ in Zusammenhangskomponenten gilt: $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ ist ein Homöomorphismus. Eine solches V heißt *Fundamentalumgebung*.

Beispiel 4.0.10. Die Abbildungen $\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^\times$, $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\Lambda$ (Λ wie in Notation 2.5.16), $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z} (\cong S^1)$ sind Überlagerungen. Die Abbildung $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, p_n : z \mapsto z^n$ für $n \geq 2$ ist *keine* Überlagerung, da 0 keine Fundamentalumgebung hat ($p^{-1}(U_\epsilon(0)) = U_{\sqrt[n]{\epsilon}}(0)$ ist zusammenhängend, aber p ist auf $U_{\sqrt[n]{\epsilon}}(0)$ nicht injektiv, also kein Homöomorphismus). Jedoch ist $p_n|_{\mathbf{C}^\times}$ eine Überlagerung.

Letzteres Beispiel ist in gewisser Weise prototypisch: eine eigentliche nicht-konstante Abbildung $p : X \rightarrow Y$ von Riemannschen Flächen ist nicht notwendig eine Überlagerung, aber es gibt eine offene dichte Teilmenge Y' , wo die Einschränkung von p eine Überlagerung ist:

Satz 4.0.11. Sei $p : X \rightarrow Y$ *eigentlich, nicht konstant, holomorph, X und Y Riemannsche Flächen*. Dann ist die Restriktion

$$p' : X' := X \setminus p^{-1}(B) \rightarrow Y' := Y \setminus B$$

eine Überlagerung. Für $y \in Y'$ hat $p'^{-1}(y)$ genau n Elemente, wobei $n \in \mathbf{N}$ unabhängig von y ist. (Man nennt n auch die *Blätterzahl* von p' , siehe Folgerung 4.1.14.) Allgemeiner wird jeder Wert $y \in Y$ mit Vielfachheiten gezählt n Mal angenommen, d.h.

$$n = \sum_{x \in p^{-1}(y)} \text{ord}_x p.$$

(Die Summe ist endlich nach Lemma 4.0.5.)

Die Zahl n heißt auch *Grad* von p , Notation $\text{deg } p$.

Beweis. Fixiere $y \in Y$. Wir werden zeigen, dass es eine offene Umgebung $V \ni y$ gibt, so dass die Zahl $n_{y'}$ für $y' \in V$ nicht von y' abhängt. Falls $y \in Y' := Y \setminus p(A)$ ist, wird $p|_{p^{-1}(V)} : p^{-1}(V) \rightarrow V$ außerdem eine Überlagerung sein.

Sei $p^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$ mit paarweise verschiedenen x_i . Es gibt offene Umgebungen $U'_i \ni x_i$ und $V'_i \ni y$ so dass $p|_{U'_i} : U'_i \rightarrow V'_i$ isomorph zu $z \mapsto z^{\text{ord}_{x_i} p}$ ist. Durch Verkleinern (da X Hausdorff ist!) können wir annehmen, dass die U'_i disjunkt sind. Dann ist $U' := \bigsqcup U'_i$ eine offene Umgebung von $p^{-1}(y)$.

Sei $V := Y \setminus p(X \setminus U)$. Dies ist offen in Y , da p abgeschlossen ist. (Dies ist das entscheidende Argument.) Außerdem gilt $p^{-1}(y) \subset p^{-1}(V) \subset U'$. Setze $U_i := U'_i \cap p^{-1}(V)$. Dann ist $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ nach wie vor isomorph zur Abbildung $z \mapsto z^{\text{ord}_{x_i} p}$.

Falls $y \in Y'$ so ist $\text{ord}_{x_i} p = 1$, damit ist p auf jeder Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(V)$ ein Homöomorphismus, d.h. p' ist in der Tat eine Überlagerung. ■

Die zweite Behauptung folgt auch sofort, denn für $p_k : z \mapsto z^k$ ist $k = \text{ord}_0 p_k$ auch die Anzahl der Urbildpunkte $p^{-1}(w)$ für $w \neq 0$. □

4.1 Topologie von Überlagerungen

Um Theorem 4.0.1 zu beweisen, benötigen wir genauere Informationen über topologische Eigenschaften von sog. Überlagerungen. Wir folgen hierbei [May99]. Der Grund für diesen Exkurs ist Satz 4.0.11: für eine eigentliche, nicht konstante holomorphe Abbildung $p : X \rightarrow Y$ ist die Einschränkung $p|_{p^{-1}(Y')} : p^{-1}(Y') \rightarrow Y'$ für eine geeignete offene dichte Teilmenge $Y' \subset Y$ eine Überlagerung.

Definition 4.1.1. Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn in jeder Umgebung $U \ni x$ eines beliebigen Punktes $x \in X$ eine weitere Umgebung $V \ni x$ enthalten ist, die wegzusammenhängend ist.

Notation 4.1.2. In diesem Abschnitt seien alle topologischen Räume zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und alle Abbildungen stetig. (Wir werden später den holomorphen Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen betrachten, diese erfüllen diese Bedingungen.)

Wir beginnen nun das topologische Studium von Überlagerungen. Unser Ziel für die Anwendung auf Riemannsche Flächen ist die Klassifikation von Überlagerungen von $\mathbf{D}^\times = \{0 < |z| < 1\}$ (Beispiel 4.1.22): es sind gerade $\exp : \{\Re z < 0\} \rightarrow \mathbf{D}^\times$ und $p_k : \mathbf{D}^\times \rightarrow \mathbf{D}^\times, z \mapsto z^k$. Hieraus folgt auch die Erkenntnis, dass wir die eigentlichen Überlagerungen p_k auf \mathbf{D} fortsetzen können, was wir zur Konstruktion von X mit gegebenem Funktionenkörper entscheidend nutzen werden.

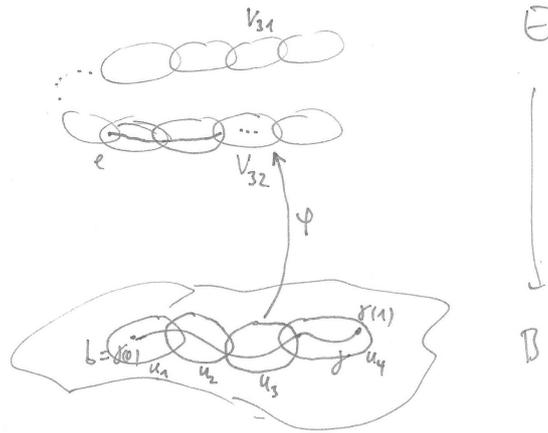
Satz 4.1.3. Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B, e \in F_b := p^{-1}(b) \subset E$.

- (i) Wege in B können eindeutig zu Wegen in E angehoben werden, wenn der Anfangspunkt der Anhebung vorgegeben ist. D.h., folgendes kommutatives Diagramm hat genau einen Lift, d.h. genau eine diagonale Abbildung $\hat{\gamma}$, so dass beide Hälften des Diagramms kommutativ sind:

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \xrightarrow{e} & E \\
 \downarrow & \nearrow \hat{\gamma} & \downarrow p \\
 I & \xrightarrow{\gamma} & B
 \end{array}$$

- (ii) Die Anhebung von homotopen Wegen $\gamma \sim \gamma'$ (mit Anfangspunkt b) haben homotope Anhebungen $\hat{\gamma} \sim \hat{\gamma}'$ (mit Anfangspunkt e). Insbesondere ist $\hat{\gamma}(1) = \hat{\gamma}'(1)$.

Beweis. (i): da I kompakt ist, gibt es endlich viele Fundamentalumgebungen U_1, \dots, U_n , die γ überdecken. Induktiv setzt man die begonnene Anhebung fort: wenn die Anhebung bis zu U_{k-1} (im Bild $k = 3$) konstruiert ist, sei $V_{k,j}$ die eindeutige Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U_k)$, die das bisherige Ende der Anhebung trifft. Sei φ das Inverse von p auf dieser Komponente. Dann setzt man $\hat{\gamma}$ als $\varphi \circ \gamma$ fort:



(ii): Sei $h : I \times I \rightarrow B$ eine Homotopie zwischen γ und γ' . Analog zum vorigen Argument erhält man eine eindeutige Anhebung \hat{h} , indem man $I \times I$ durch $f^{-1}(V)$ überdeckt, wobei die V eine Fundamentalumgebung für p bilden:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (0, 0) & \xrightarrow{e} & E \\
 & & \downarrow & \nearrow \hat{h} & \downarrow p \\
 I \times \{0, 1\} & \xrightarrow{\iota} & I \times I & \xrightarrow{h} & B.
 \end{array}$$

Die Komposition $h \circ \iota$ ist $\gamma \sqcup \gamma'$. Wegen der Eindeutigkeit in (ii) ist $\hat{h} \circ \iota = \hat{\gamma} \sqcup \hat{\gamma}'$. Aus dem gleichen Grund ist die Restriktion von \hat{h} auf $\{i\} \times I$, $i = 0, 1$, welches eine Anhebung des konstanten Weges $h(\{i\}, I) = \{\gamma(i)\}$ ist, der konstante Weg, d.h. Anfangs- und Endpunkt werden durch \hat{h} festgehalten. Also ist \hat{h} eine Homotopie zwischen $\hat{\gamma}$ und $\hat{\gamma}'$. \square

Definition 4.1.4. Eine Kategorie \mathcal{C} besteht aus einer Klasse $\text{ob}(\mathcal{C})$ von Objekten sowie einer Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von Morphismen für je zwei Objekte $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ sowie einer Komposition

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), (f, g) \mapsto g \circ f,$$

(Kurzschreibweise $f : X \rightarrow Y$ für $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.) Es muss gelten:

1. Für jedes Objekt X gibt es einen Identitätsmorphismus $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ so dass gilt $\text{id} \circ f = f$ für alle $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $f \circ \text{id}$ für alle $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.
2. Die Komposition ist assoziativ: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ für $X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} W$.

Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwischen zwei Kategorien ist eine Abbildung $F : \text{ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{D})$ sowie für alle $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ eine Abbildung

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)),$$

die folgenden Bedingungen genügt:

1. F ist mit der Komposition verträglich, d.h. für alle $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ gilt

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

2. F bewahrt Identitätsmorphismen, d.h. für alle $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ gilt

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}.$$

Definition 4.1.5. Ein Gruppoid ist eine Kategorie \mathcal{X} , in der alle Morphismen Isomorphismen sind. Für ein Objekt $x \in \mathcal{X}$ schreiben wir $\pi(\mathcal{X}, x) := \text{Hom}_{\mathcal{X}}(x, x)$. (Dies ist nach Definition eine Gruppe.)

Beispiel 4.1.6. Eine Monoid N liefert eine Kategorie, der genau ein Objekt $*$ hat mit $\text{Hom}(*, *) = N$, Verknüpfung gegeben durch die Verknüpfung in N . Diese Kategorie ist ein Gruppoid genau dann, wenn N eine Gruppe ist. Salopp kann man also sagen, dass ein Gruppoid eine Gruppe mit mehreren Objekten ist.

Definition 4.1.7. Der Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ eines topologischen Raumes X ist die Kategorie deren Objekte die Punkte in X sind mit Morphismen

$$\text{Hom}_{\Pi(X)}(x, y) = \{\text{Homotopieklassen von Wegen von } x \text{ nach } y\},$$

und Verknüpfung gegeben durch Komposition von Homotopieklassen von Wegen. (Diese wurde in Übungsaufgabe 2.7.8 im Kontext der Fundamentalgruppe betrachtet.)

Definition 4.1.8. Für einen Gruppoiden \mathcal{X} und ein Objekt $x \in \mathcal{X}$ ist der *Stern* definiert als die Menge

$$\text{St}(x) := \{\text{Morphismen } x \rightarrow y \text{ mit } y \in \text{ob}(\mathcal{X}) \text{ beliebig}\}.$$

Ein Gruppoid ist *zusammenhängend*, wenn alle Objekte $x \in \mathcal{X}$ isomorph zueinander sind. Eine *Überlagerung von Gruppoiden* $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ ist ein Funktor zwischen zusammenhängenden Gruppoiden der auf Objekten surjektiv ist und so dass für alle Objekte $e \in \mathcal{E}$

$$p : \text{St}(e) \rightarrow \text{St}(p(e))$$

bijektiv ist.

Beispiel 4.1.9. Folgende Übersicht vergleicht die obigen Konzepte für topologische Räume und Gruppoide:

	topologischer Raum		Gruppoid
	E	\mapsto	$\Pi(E)$
Homotopieklassen von Wegen mit Anfangspunkt e	$=$		$\text{St}_{\Pi(E)}(e)$
$p : E \rightarrow B$	\mapsto		$p_* : \Pi(E) \rightarrow \Pi(B)$
p Überlagerung	$\xrightarrow{\text{Satz 4.1.3}}$		p_* Überlagerung von Gruppoiden
$\pi_1(E, e)$	$=$		$\text{Hom}_{\Pi X}(x, x) =: \pi(\Pi(X), x)$
E zusammenhängend	\Leftrightarrow		$\Pi(E)$ zusammenhängend

Definition 4.1.10. Sei G eine Gruppe. Eine *Menge mit G -Wirkung* oder auch *G -Menge* ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx,$$

die folgende Bedingungen erfüllt: $g(hx) = (gh)x$ für $g, h \in G, ex = x$. (Äquivalent hierzu: die Abbildung definiert einen Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \text{Aut}(X)$.) Eine Abbildung von G -Mengen ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(gx) = gf(x)$ für alle $g \in G$. Wir bezeichnen diese Menge mit $\text{Hom}_G(X, Y)$.

Die *Isotropiegruppe* von $x \in X$ ist definiert als

$$G_x := \{g \in G, gx = x\}.$$

(Man sieht sofort, dass es eine Untergruppe von G ist.)

Lemma 4.1.11. Sei $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ eine Überlagerung von Gruppoiden. Für fixiertes $b \in \mathcal{B}$ ist $F_b := p^{-1}(b) \subset \text{ob}(\mathcal{E})$ eine Menge mit einer Wirkung von $G := \pi(\mathcal{B}, b)$ und es besteht ein Isomorphismus von G -Mengen

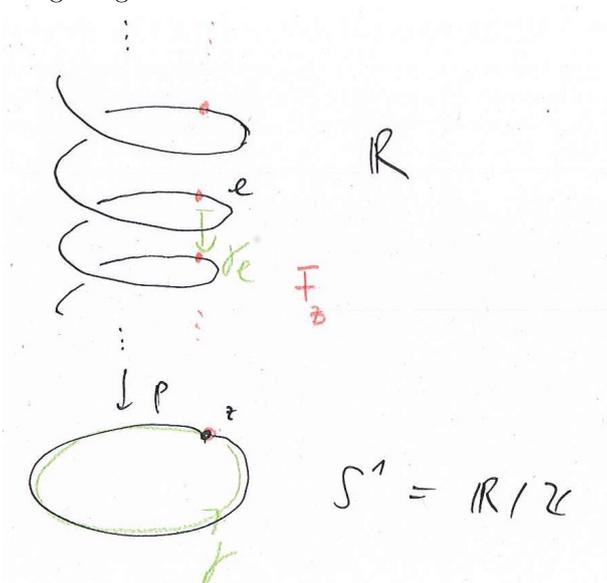
$$G/p(\pi(\mathcal{E}, e)) \xrightarrow{\cong} F_b.$$

Insbesondere, falls p eine universelle Überlagerung ist, gilt

$$G = F_b. \tag{4.1.12}$$

Die analogen Aussagen für Überlagerungen topologischer Räume gelten ebenfalls.

Beispiel 4.1.13. Für die Überlagerung $\mathbf{R} \rightarrow S^1$:



Beweis. Für $g \in \pi(\mathcal{B}, b) \subset \text{St}(b)$ und $e \in F_b$ definiere ge als das eindeutige Element welches unter der Bijektion

$$\text{St}(e) \xrightarrow{p: \cong} \text{St}(b)$$

auf g abgebildet wird. Man prüft sofort, dass dies eine Gruppenwirkung ist.

Die Wirkung ist *transitiv*, d.h. für je zwei $e, e' \in F_b$ gibt es $g \in G$ mit $ge = e'$: es gibt nämlich, da \mathcal{E} zusammenhängt, einen (Iso-)Morphismus $e \xrightarrow{\gamma} e'$ in \mathcal{E} , dieser wird unter p auf ein $g \in G$ abgebildet, es folgt $ge = e'$.

Es gilt $ge = e$ für $e \in F_b$ genau dann, wenn $g = p(h)$, $h \in \pi(\mathcal{E}, e)$. Mit anderen Worten: die Isotropiegruppe von $e \in F_b$ ist gerade $p(\pi(\mathcal{E}, e))(\subset G)$.

Wir erhalten einen Isomorphismus von G -Mengen:

$$\begin{aligned} G/p(\pi(\mathcal{E}, e)) &\xrightarrow{\cong} F_b \\ g &\mapsto ge. \end{aligned}$$

□

Folgerung 4.1.14. *Für eine Überlagerung $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ sind die Fasern F_b für alle $b \in \mathcal{B}$ zueinander bijektiv. Man nennt die Anzahl der Elemente von F_b auch die Blätterzahl von p . (Falls $n := \sharp F_b$ endlich ist, nennt man p auch eine n -blättrige Überlagerung.)*

Beweis. Es gibt nach Definition einen (Iso-)Morphismus $b \xrightarrow{\gamma} b'$. Für $e \in F_b$ gibt es eine eindeutige Anhebung $\hat{\gamma}$ mit Anfangspunkt e . Sein Endpunkt sei e' . Definiere eine Abbildung $F_b \rightarrow F_{b'}$ durch $e \mapsto e'$. Konstruiere analog $F_{b'} \rightarrow F_b$ mittels γ^{-1} . Die beiden Kompositionen dieser Abbildungen sind Anhebungen von id_b bzw. $\text{id}_{b'}$, d.h. sie müssen aus Eindeutigkeitsgründen id_{F_b} bzw. $\text{id}_{F_{b'}}$ sein. □

Satz 4.1.15. *(Liftungseigenschaft von Gruppoiden) Betrachte folgendes kommutative Diagramm, wobei p eine Überlagerung ist und \mathcal{X} ein zusammenhängender Gruppoid:*

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{e_0} & \mathcal{E} \\ x_0 \downarrow & \hat{f} \nearrow & \downarrow p \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{B} \end{array}$$

Dann gibt es eine Anhebung \hat{f} genau dann, wenn

$$f(\pi(\mathcal{X}, x_0)) \subset p(\pi(\mathcal{E}, e_0))$$

(Inklusion von Teilmengen von $\pi(\mathcal{B}, b_0)$, $b_0 = p(e_0)$) gilt. In diesem Fall ist die Anhebung \hat{f} eindeutig.

Beweis. Die Bedingung ist sicher notwendig. Sei $x \in \mathcal{X}$ ein Objekt. Um $\hat{f}(x)$ zu definieren, wähle einen (Iso-)Morphismus $\alpha : x_0 \rightarrow x$ in \mathcal{X} . Betrachte folgendes Diagramm, wobei $\hat{\alpha}$ das eindeutige Element in $\text{St}(e_0) \xrightarrow{p: \cong} \text{St}(p(e_0)) = \text{St}(b_0)$ ist:

$$\begin{array}{ccc} & e_0 & \xrightarrow{\hat{\alpha}} e \\ & \uparrow f & \downarrow p \\ x_0 & \xrightarrow{\alpha} x & \xrightarrow{f} b_0 \rightarrow b \end{array} \quad \hat{\alpha}' := (e_0 \xrightarrow{\beta} e_0 \xrightarrow{\hat{\alpha}} e)$$

$$f(\alpha') = \left(f(x_0) \xrightarrow{f(\alpha')} f(x) \xrightarrow{f(\alpha^{-1})} f(x_0) \xrightarrow{f(\alpha)} f(x) \right)$$

Wenn \hat{f} existiert, muss $\hat{f}(\alpha)$ gerade $\hat{\alpha}$ sein. Um zu zeigen, dass $\hat{f}(x) := e$ nicht von der Wahl von α abhängt (und damit ein wohldefinierter Funktor ist), sei $\alpha' : x_0 \rightarrow x$ ein anderer Morphismus. Dann ist $\alpha^{-1} \circ \alpha' \in \pi(\mathcal{X}, x_0)$, also $f(\alpha)^{-1} \circ f(\alpha') = f(\alpha^{-1} \circ \alpha') = p(\beta)$ für ein $\beta \in \pi(\mathcal{E}, e_0)$. Hieraus folgt

$$p(\hat{\alpha} \circ \beta) = f(\alpha) \circ p(\beta) = f(\alpha) \circ f(\alpha)^{-1} \circ f(\alpha') = f(\alpha').$$

Also ist $\hat{\alpha} \circ \beta$ das eindeutige Element $\hat{\alpha}'$ von $\text{St}(e_0)$ mit $p(\hat{\alpha}') = f(\alpha')$. Das Ziel dieses Morphismus ist auch das Ziel von $\hat{\alpha}$, was zu zeigen war. □

Satz 4.1.16. *Betrachte folgendes kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{e_0} & E \\ x_0 \downarrow & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

wobei p eine Überlagerung. (X wie jeder Raum per Konvention zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend.) Es gibt eine Abbildung \hat{f} genau dann wenn

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

In diesem Fall ist \hat{f} eindeutig.

Zum Beispiel ist dies für alle p erfüllt, wenn X einfach zusammenhängend ist. In diesem Fall heißt p eine universelle Überlagerung.

Beweis. Wir wenden Π auf das Diagramm an und erhalten eine Überlagerung von Gruppoiden: $\Pi(p) : \Pi(E) \rightarrow \Pi(B)$. Nach Satz 4.1.15 gibt es (genau) eine Anhebung $\Pi(X) \rightarrow \Pi(E)$, wenn die vorausgesetzte Bedingung gilt. Wir müssen zeigen, dass die Abbildung $\hat{f} : X \rightarrow E$, die dies auf Objekten definiert, eine stetige Abbildung ist.

Sei hierzu $x \in X$, $\hat{f}(x) \in U$, $U \subset E$ offen. Es gibt dann $\hat{f}(x) \in U' \subset U$ (offen) so dass $p|_{U'}$ homöomorph auf eine offene Teilmenge $V \subset B$ abbildet. Sei $W \ni x$ eine wegzusammenhängende Umgebung mit $f(W) \subset V$ (existiert, da X lokal wegzusammenhängend ist). Dann gilt $\hat{f}(W) \subset U'$, wie man anhand der Definition von \hat{f} sieht: jeder Punkt $x' \in W$ ist durch einen Weg $x \xrightarrow{\gamma} x'$ mit x verbunden. $\hat{f}(\gamma)$ ist der eindeutige Weg, der $f(\gamma) \subset V$ anhebt. \square

Lemma 4.1.17. *Falls*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E}' \\ & \searrow p & \nearrow p' \\ & & \mathcal{B} \end{array} \tag{4.1.18}$$

ein kommutatives Diagramm von Gruppoiden ist und p, p' Überlagerungen sind, so ist auch f eine Überlagerung. Die analoge Aussage gilt für Überlagerungen topologischer Räume.

Beweis. Wir zeigen erst die Aussage für Gruppoide. Für $e \in \mathcal{E}$ ist

$$\begin{array}{ccc} \text{St}_{\mathcal{E}}(e) & \xrightarrow{f} & \text{St}_{\mathcal{E}'}(f(e)) \\ & \searrow p & \nearrow (p')^{-1} \\ & & \text{St}_{\mathcal{B}}(p(e)) \end{array}$$

f als Komposition zweier Bijektionen eine Bijektion. f ist surjektiv auf Objekten: sei $e' \in \mathcal{E}'$. Wähle $e \in \mathcal{E}$ mit $p(e) = p'(e')$. Da \mathcal{E}' zusammenhängt, gibt es einen Pfeil $f(e) \xrightarrow{\alpha} e'$. Wegen der eben gezeigten Bijektion gibt es einen (eindeutigen) Morphismus $e \rightarrow \tilde{e}$, der unter f auf α abbildet. Insbesondere ist $f(\tilde{e}) = e'$.

Für topologische Räume folgt die Surjektivität von f aus der von $\Pi(f)$, die eben gezeigt wurde. Sei $e' \in E'$ ein Punkt, $b := p'(e')$ und $V \ni b$ eine Fundamentalumgebung für p und p' . Dann ist die Wegzusammenhangskomponente von $p'^{-1}(V)$, die e' enthält, eine Fundamentalumgebung von e' . Also ist f eine Überlagerung. \square

Folgerung 4.1.19. *Seien $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ und $p' : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$ Überlagerungen von Gruppoiden. Fixiere e, e' die beide auf $b \in \mathcal{B}$ abbilden. Es gibt eine Abbildung f , die (4.1.18) kommutativ macht und $f(e) = e'$ erfüllt, genau dann, wenn*

$$p(\pi(\mathcal{E}, e)) \subset p'(\pi(\mathcal{E}', e'))$$

gilt. In diesem Fall ist f eindeutig.

Insbesondere stimmen zwei solche Abbildungen f und \tilde{f} überein, wenn $f(e) = \tilde{f}(e)$.

Die analoge Aussage für Überlagerungen topologischer Räume gilt ebenfalls.

Satz 4.1.20. *Seien $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ und $p' : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$ Überlagerungen von Gruppoiden. Sei $b \in \mathcal{B}$ fixiert und setze $G := \pi(\mathcal{B}, b)$. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') &\rightarrow \text{Hom}_G(F_b, F'_b) \\ f &\mapsto f|_{F_b}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ die Menge von kommutativen Dreiecken wie in Lemma 4.1.17. Wie oben ist $F_b = p^{-1}(b)$ und Hom_G bezeichnet die Abbildungen von G -Mengen.

Die analoge Aussage für Überlagerungen von topologischen Räumen gilt ebenfalls.

Beweis. Wähle $e \xrightarrow{p} b$, sei $e' := \alpha(e)$ und beachte die G -äquivalente Isomorphismen (Lemma 4.1.11):

$$F_b = G/p(\pi(\mathcal{E}, e)), F'_b = G/p'(\mathcal{E}', e').$$

Wir erhalten daher Bijektionen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(F_b, F'_b) = \text{Hom}_G(G/p(\pi(\mathcal{E}, e)), G/p'(\pi(\mathcal{E}', e'))) &\xrightarrow{\cong} \begin{cases} \{*\} & p(\mathcal{E}, e) \subset p(\mathcal{E}', e') \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \\ &f \mapsto f(1_G). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann sofort aus Folgerung 4.1.19. \square

Folgerung 4.1.21. Sei $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ eine Überlagerung von Gruppoiden, wähle $e \xrightarrow{p} b$. Sei $G := \pi(\mathcal{B}, b)$, $H := p(\pi(\mathcal{E}, e))$.

(i) Falls $H \subset G$ ein Normalteiler ist, so gilt $\text{Aut}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) = G/H$.

(ii) Insbesondere, falls H trivial ist, gilt $\text{Aut}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) = G$.

Die analoge Aussage für topologische Räume gilt wiederum. Insbesondere: falls E eine sog. universelle Überlagerung ist, d.h. falls einfach zusammenhängend ist, gilt

$$\pi_1(B, b) = \text{Aut}_B(E).$$

Die Gruppe $\text{Aut}_B(E)$ heißt auch Gruppe der Decktransformationen von p .

Beweis. Dies folgt aus Satz 4.1.20 wegen $F_b = G/H$ (Lemma 4.1.11). \square

Für unser späteres Studium der Überlagerungen Riemannscher Flächen wird folgendes Beispiel wichtig sein:

Beispiel 4.1.22. Es gilt $\pi_1(\mathbf{C}^\times) \cong \mathbf{Z}$.

Eine Überlagerung $p : E \rightarrow \mathbf{C}^\times$ ist p entweder homöomorph zur universellen Überlagerung oder homöomorph zur Überlagerung $p_n : \mathbf{C}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times, z \mapsto z^n$ für $n \in \mathbf{N}^{>0}$, d.h. es gibt einen Homöomorphismus φ mit

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & Y := \{z \in \mathbf{C}, \Re(z) < 0\} \\ & \searrow p & \swarrow \exp \\ & & \mathbf{C}^\times \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{C}^\times \\ & \searrow p & \swarrow p_n \\ & & \mathbf{C}^\times \end{array}$$

Wortwörtlich die gleichen Aussagen gelten für $\mathbf{D}^\times := \{z \in \mathbf{C}, 0 < |z| < 1\}$ anstelle von \mathbf{C}^\times .

Beweis. Betrachte die Überlagerung $\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^\times$. Sie ist universell, da \mathbf{C} konvex und damit einfach zusammenhängend sind. Es gibt einen Isomorphismus

$$\pi_1(\mathbf{C}^\times, 1) = \exp^{-1}(1) = 2\pi i \mathbf{Z}$$

nach (4.1.12).

Für jede Überlagerung $p : E \rightarrow \mathbf{C}^\times$ ist $p(\pi_1(E)) \subset \pi_1(\mathbf{C}^\times) \cong \mathbf{Z}$ eine Untergruppe, sagen wir $n\mathbf{Z}$, mit $n \geq 0$. Nach Lemma 4.1.11 ist $p^{-1}(1) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Andererseits gilt das gleiche auch für \exp (im Fall $n = 0$) bzw. p_n (für $n > 0$). Die Fasern beider Überlagerungen sind also (jeweils im betreffenden Fall) als \mathbf{Z} -Mengen isomorph, daher sind auch die Überlagerungen nach Satz 4.1.20 isomorph. \square

Das Argument für \mathbf{D}^\times ist analog, mit $\exp : \{z \in \mathbf{C}, \Re(z) < 0\} \rightarrow \mathbf{D}^\times$ als universeller Überlagerung. \square

Bemerkung 4.1.23. Wir haben uns etwas Arbeit erspart, da wir die Überlagerungen von \mathbf{C}^\times bereits explizit konstruiert haben.

Man kann allgemeiner folgende Charakterisierung von Überlagerungen zeigen, siehe [May99, §II.6, II.7, II.8]. (Wir haben gezeigt, dass für jede Überlagerung $p : E \rightarrow B$ die Faser F_b eine G -Menge mit transitiver G -Wirkung ist. Es bleibt daher im Wesentlichen die Aufgabe, für eine transitive G -Menge F eine Überlagerung zu konstruieren, deren Faser in b gerade F ist. Man zeigt hierzu zunächst, dass es (unter milden Annahmen an B) stets eine universelle Überlagerung \tilde{B} gibt, diese korrespondiert zur G -Menge $F = G$. Anschließend, für $F = G/H$, H eine Untergruppe von G , konstruiert man die gesuchte Überlagerung im wesentlichen mittels $E := \tilde{B}/H$.)

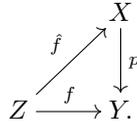
Satz 4.1.24. Sei B ein topologischer Raum (wie immer hier zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend) und $b \in B$. Sei $G := \pi_1(B, b)$. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{aligned} \{\text{Überlagerungen von } B\} &\longrightarrow \{G\text{-Mengen mit transitiver } G\text{-Wirkung}\} \\ (p : E \rightarrow B) &\mapsto F_b := p^{-1}(b). \end{aligned}$$

4.2 Überlagerungen Riemannscher Flächen

Wir wollen die obigen rein topologischen Aussagen auf Riemannsche Flächen anwenden. Hierzu ist folgende Tatsache wichtig:

Lemma 4.2.1. *Seien X, Y, Z Riemannsche Flächen und p eine holomorphe Überlagerung (d.h. eine holomorphe Abbildung, die außerdem eine Überlagerung im Sinne von Definition 4.0.9 ist) und f holomorph. Dann ist jede Anhebung \hat{f} ebenfalls holomorph:*



Beweis. Seien $z \xrightarrow{\hat{f}} x \xrightarrow{p} y$ Punkte. Seien $V \ni y$ und $U \ni x$ Umgebungen, so dass $p|_U : U \rightarrow V$ homöomorph ist und wegen Theorem 3.1.9(v) sogar biholomorph ist. Also ist $\hat{f}|_{\hat{f}^{-1}(V)} = p^{-1} \circ f$ ebenfalls holomorph. \square

Folgerung 4.2.2. *Zwei elliptische Kurven $X = \mathbf{C}/\Lambda$ und $X' = \mathbf{C}/\Lambda'$ sind biholomorph genau dann, wenn es ein $r \in \mathbf{C}^\times$ gibt mit*

$$r\Lambda = \Lambda'.$$

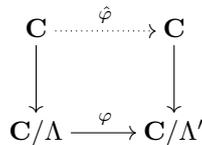
Bemerkung 4.2.3. Beachte, dass jede elliptische Kurve homöomorph zu $S^1 \times S^1$ ist, d.h. alle elliptischen Kurven sind zueinander homöomorph. Homöomorph zu sein ist also eine wesentlich schwächere Bedingung als biholomorph zu sein. Eine Variante des folgenden Arguments wird in Übungsaufgabe 4.3.1 benutzt.

Beweis. Die Behauptung folgt aus der folgenden präziseren Aussage:

$$\text{Hom}(\mathbf{C}/\Lambda, \mathbf{C}/\Lambda') = \{f([z]) = [rz + a], r \in \mathbf{C}, a \in \mathbf{C}, r\Lambda \subset \Lambda'\},$$

hierbei bedeutet $[z]$ das Bild von $z \in \mathbf{C}$ in \mathbf{C}/Λ usw.

Im Liftungsdiagramm



gibt es nach Satz 4.1.16 eine stetige Anhebung $\hat{\varphi}$. Diese ist nach Lemma 4.2.1 sogar holomorph. Für $\lambda \in \Lambda$ ist $z \mapsto \hat{\varphi}(z + \lambda) - \hat{\varphi}(z)$ eine stetige Abbildung $\mathbf{C} \rightarrow \Lambda'$, d.h. konstant. Insbesondere ist

$$\frac{\hat{\varphi}(z + \lambda + h) - \hat{\varphi}(z + \lambda)}{h} = \frac{\hat{\varphi}(z + h) - \hat{\varphi}(z)}{h},$$

d.h. $\hat{\varphi}'$ ist Λ -periodisch (und holomorph), also nach Liouville (Übungsaufgabe 2.7.7) konstant, d.h. $\hat{\varphi}$ ist linear. \square

Als ersten Schritt im Beweis von Theorem 4.0.1 wollen wir zeigen, dass $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)$ eine endliche Körpererweiterung ist. Hierzu benutzen wir *elementarsymmetrische Funktionen*

$$s_1 = \sum t_i, s_2 = \sum_{i,j} t_i t_j, \dots, s_n = \prod_i t_i. \tag{4.2.4}$$

Es ist bekannt (wird aber im folgenden nicht gebraucht), dass jede symmetrische Funktion in t_1, \dots, t_n ein Polynom in den s_i ist, d.h.

$$\mathbf{Z}[t_1, \dots, t_n]^{\Sigma_n} = \mathbf{Z}[s_1, \dots, s_n].$$

Notation 4.2.5. Sei im folgenden $p : X \rightarrow Y$ eine eigentliche, nicht konstante holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen.

Definition 4.2.6. Sei p eine (eigentliche) n -blättrige Überlagerung (d.h. n ist die Anzahl der Elemente in irgendeiner Faser von p , siehe Folgerung 4.1.14). Ausnahmsweise fordern wir hier nicht, dass X zusammenhängend ist (sondern nur dass die Zusammenhangskomponenten von X Riemannsche Flächen sind.)

Sei $f \in \mathcal{M}(X)$. Die *elementarsymmetrischen Funktionen* von f bezüglich p sind folgende $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{M}(Y)$: für jedes $y \in Y$ gibt es eine Fundamentalmgebung $V \subset Y$, d.h. p ist auf den Zusammenhangskomponenten U_i von $p^{-1}(V)$ ein Homöomorphismus. Sei $\tau_i : V \rightarrow U_i$ die Umkehrabbildung und setze $f_i := \tau_i^* f \in \mathcal{M}(U_i)$. Sei

$$c_\nu := (-1)^\nu s_\nu(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{M}(V).$$

Für verschiedene V verkleben sie sich zu $c_\nu \in \mathcal{M}(Y)$.

Bemerkung 4.2.7. In der obigen Situation gilt dann

$$\prod_{\nu=1}^n (T - f_\nu) = T^n + c_1 T^{n-1} + \dots + c_n \in \mathcal{M}(Y)[T].$$

Lemma 4.2.8. Sei $p : X \rightarrow Y$ eigentlich, $\deg p = n$. Sei $B \subset X$ eine diskrete Teilmenge, die die kritischen Werte von p enthält. Sei $A = p^{-1}(B)$, $X' := X \setminus A$, $Y' = Y \setminus B$. (Nach Satz 4.0.11 ist $p' = p|_{X'}$ dann eine n -blättrige Überlagerung.)

Sei $f \in \mathcal{O}(X')$ (oder $f \in \mathcal{M}(X')$) und $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{O}(Y')$ (bzw. $\in \mathcal{M}(Y')$) seine elementarsymmetrischen Funktionen.

Dann lässt sich f holomorph (oder meromorph) auf X fortsetzen genau dann, wenn die c_i sich holo- bzw. meromorph auf Y fortsetzen lassen.

Beweis. Die meromorphe Aussage folgt aus der holomorphen, da die elementarsymmetrischen Funktionen \tilde{c}_k on $\tilde{f} = z^s f$ gerade $\tilde{c}_k = z^{ks} c_k$ sind und f (analog mit c_k) meromorph ist, wenn (lokal um 0) $z^s f$ holomorph ist.

Sei $b \in B$, $p^{-1}(b) = \{a_1, \dots, a_r\}$. Für die holomorphe Aussage ist nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz zu zeigen: f ist in einer Umgebung von a_i beschränkt genau dann, wenn die c_j in einer Umgebung von b beschränkt sind. In der Tat: \Leftarrow folgt direkt aus der Definition (4.2.4). \Rightarrow folgt daraus, dass für $x \in X'$, $y = p(x) \in Y'$:

$$f(x)^n + c_1(y)f(y)^{n-1} + \dots + c_n(y) = 0.$$

□

Lemma 4.2.9. Sei $p : X \rightarrow Y$ eigentlich, $\deg p = n$.

(i) Sei $f \in \mathcal{M}(X)$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{M}(Y)$ ihre elementarsymmetrischen Funktionen. (definiert auf Y' in Definition 4.2.6 und ausgedehnt auf Y in Lemma 4.2.8). Dann gilt

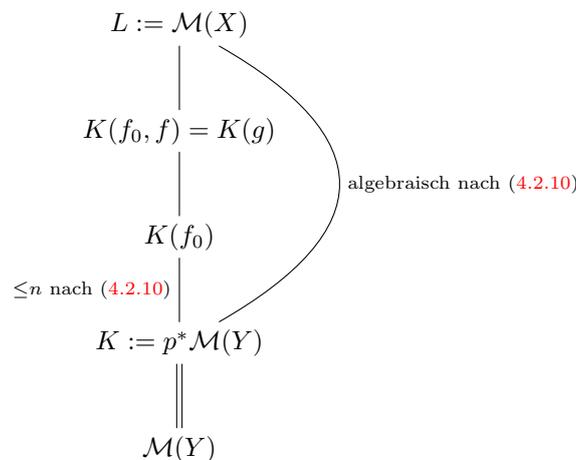
$$f^n + (p^* c_1) f^{n-1} + \dots + (p^* c_n) = 0. \tag{4.2.10}$$

Der Monomorphismus $p^* : \mathcal{M}(Y) \rightarrow \mathcal{M}(X)$ ist eine algebraische Körpererweiterung vom Grad $\leq n$.

(ii) Wir nehmen an, dass es $f \in \mathcal{M}(X)$ gibt, sowie $y \in Y$, $p^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ so dass die $f(x_i)$ paarweise verschieden sind. Dann gilt $\deg(\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(Y)) = n$.

Bemerkung 4.2.11. Man kann zeigen, dass es eine Funktion f wie in (ii) stets gibt, dies erfordert jedoch mehr Arbeit.

Beweis. (i): (4.2.10) folgt aus der Definition der c_i . Wir betrachten folgenden Körperturm, wobei $f_0 \in L$ so gewählt ist, dass $\dim_K K(f_0)$ maximal ist. (Dies ist möglich, da diese Dimension nach (4.2.10) stets $\leq n$ ist.)



Sei $f \in L$ ein weiteres Element. Nach dem Satz vom primitiven Element ist $K(f_0, f) = K(g)$ mit einem geeigneten $g \in L$. Aus Gradgründen und der Maximalität von f_0 folgt $K(g) = K(f_0)$, d.h. $f \in K(f_0)$, also $L = K(f_0)$.

(ii): Wäre der Grad des Minimalpolynoms P von f $m < n$, dann könnte f auf $p^{-1}(y)$ nur m verschiedene Werte annehmen: $P = \sum_{i=0}^m a_i T^i$, $a_i \in \mathcal{M}(Y)$, $P(f)(x) = \sum_i a_i(p(x)) f(x)^i = 0$ für alle $x \in X$, das Polynom $\sum_i a_i(p(x)) T^i \in \mathbb{C}[T]$ hat aber höchstens m Nullstellen. □

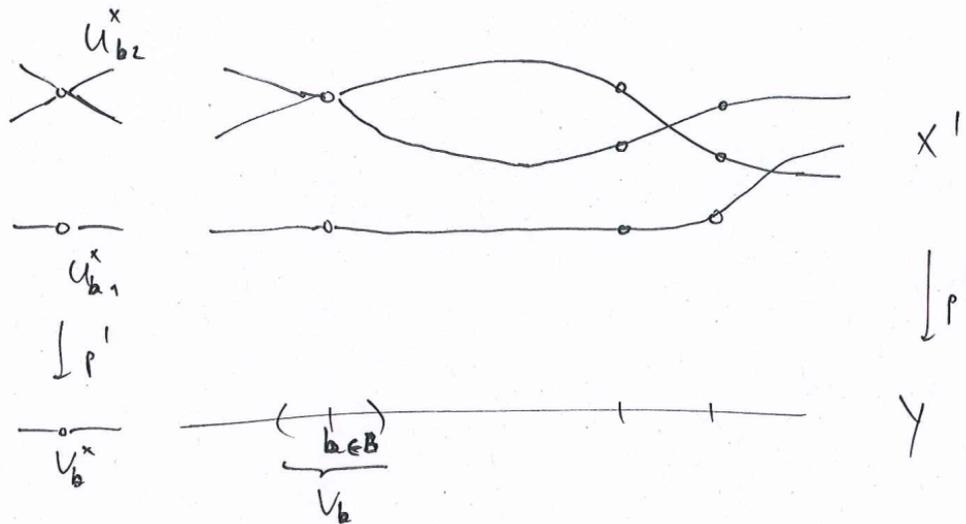
Satz 4.2.12. *Betrachte folgende Situation*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xleftarrow{\dots\dots\dots} & X' \\
 \downarrow p & & \downarrow p' \\
 B \hookrightarrow Y & \xleftarrow{\dots\dots\dots} & Y' := Y \setminus B
 \end{array}$$

wobei Y, X' Riemannsche Flächen sind, $B \subset Y$ eine diskrete (insbes. abgeschlossene) Teilmenge und p' eine eigentliche holomorphe Überlagerung ist.

Dann gibt es eine Riemannsche Fläche X und eine eigentliche holomorphe Abbildung $p : X \rightarrow Y$, so dass obiges Diagramm kommutativ bleibt.

Beweis. Wir wählen für $b \in B$ Karten-Umgebungen $b \in V_b \xrightarrow{z_b} \mathbf{D} \subset \mathbf{C}$, die keinen anderen Punkt aus B enthalten. Sei $V_b^\times := V_b \setminus \{b\}$. Da p' eigentlich ist, ist $p'^{-1}(V_b^\times)$ endliche disjunkte Vereinigung von $U_{b,1}^\times \sqcup \dots \sqcup U_{b,n}^\times$ (im Bild $n = 2$):



Außerdem ist $p' : U_{b,i}^\times \rightarrow V_b^\times$ eine eigentliche Überlagerung, also nach Beispiel 4.1.22 und Lemma 4.2.1 biholomorph zu $\mathbf{D}^\times \xrightarrow{p_k} \mathbf{D}^\times$, $p_k(z) = z^k$:

$$\begin{array}{ccc}
 U_{b,i}^\times & \xrightarrow[\cong]{\varphi_{b,i}} & \mathbf{D}^\times \\
 \downarrow p' & & \downarrow p_k \\
 V_b^\times & \xrightarrow[\cong]{z_b} & \mathbf{D}^\times
 \end{array}$$

(Die universelle Überlagerung von \mathbf{D}^\times ist nicht eigentlich und kann daher hier nicht auftreten.)

Setze

$$X := X' \sqcup_{\bigsqcup_{b,i} \mathbf{D}^\times} \bigsqcup_{b,i} \mathbf{D}$$

wobei die disjunkte Vereinigung über $b \in B$ und i wie oben läuft, die Verklebung verläuft mittels $\varphi_{b,i}^{-1} : \mathbf{D}^\times \rightarrow U_{b,i}^\times \subset X'$. Die Abbildung $p_k : \mathbf{D}_{b,i} \rightarrow \mathbf{D}_b$ (wobei k von b und i abhängt, s.o.) und $p' : X' \rightarrow Y'$ verkleben sich zu einer Abbildung

$$p : X = X' \sqcup_{\bigsqcup_{b,i} \mathbf{D}^\times} \bigsqcup_{b,i} \mathbf{D} \rightarrow Y = Y' \sqcup_{\bigsqcup_b \mathbf{D}^\times} \bigsqcup_b \mathbf{D}$$

Sie ist holomorph, da dies auf den offenen Teilmengen X' und $\mathbf{D}_{b,i} \subset X$ der Fall ist (Übungsaufgabe 3.2.2). Sie ist eigentlich, da die Einschränkung auf die endlich vielen offenen Teilmengen X' und $\mathbf{D}_{b,i}$ eigentlich ist. (Für einen topologischen Raum $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ (offene Überdeckung) ist $K \subset X$ kompakt genau dann, wenn die $K \cap U_i$ alle kompakt sind.) \square

Lemma 4.2.13. *Sei \mathcal{O} der Ring der Halme holomorpher Funktionen um $0 \in \mathbf{C}$ (Übungsaufgabe 2.7.14). Sei*

$$p(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + \dots + c_n \in \mathcal{O}[T]$$

ein Polynom mit gewissen Koeffizienten $c_i \in \mathcal{O}$ so dass $p(0) = T^n + c_1(0)T^{n-1} + \dots + c_n(0) \in \mathbf{C}[T]$ eine einfache Nullstelle $w \in \mathbf{C}$ hat. Dann hat auch p eine Nullstelle $f \in \mathcal{O}$, d.h.

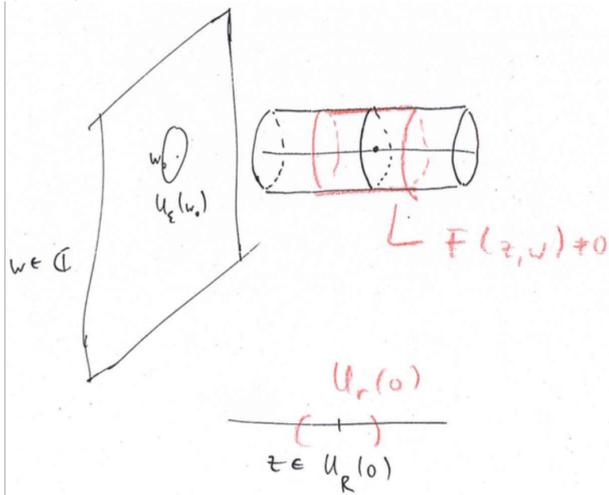
$$f^n + c_1 f^{n-1} + \dots + c_n = 0 \in \mathcal{O}$$

Daher: wenn $p(T, 0)$ nur einfache Nullstellen hat, dann ist dies auch für $p(T)$ richtig, d.h. es gibt $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}$ mit

$$p(T) = \prod_{i=1}^n (T - f_i).$$

Bemerkung 4.2.14. Das Lemma besagt gerade, dass der diskrete Bewertungsring (siehe Übungsaufgabe 2.7.14) \mathcal{O} ein *Henselscher Ring* ist. Insofern teilt er eine wichtige Eigenschaft mit diskreten vollständigen Bewertungsringen wie dem Potenzreihenring $\mathbf{C}[[T]]$ oder dem Ring \mathbf{Z}_p der p -adischen ganzen Zahlen.

Beweis. Die c_i sind Keime von Funktionen auf einer Umgebung U von 0, sagen wir $U = U_R(0)$ mit $R > 0$. Schreibe $F(z, w) := w^n + c_1(z)w^{n-1} + \dots + c_n(z)$, definiert auf $(z, w) \in U_R(0) \times \mathbf{C}$. Für $\epsilon > 0$ hat F auf $0 \times U_\epsilon(w_0)$ nur die Nullstelle $(0, w_0)$.



Daher gibt es $0 < r \leq R$ so dass F auf $U_r(0) \times \partial U_\epsilon(w_0)$ keine Nullstelle hat. Für $z \in U_r(0)$ ist

$$n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\epsilon(w_0)} \frac{F_w(z, w)}{F(z, w)} dw$$

die Anzahl der Nullstellen auf $z \times U_\epsilon(w_0)$ (Folgerung 2.5.12). Es gilt $n(0) = 1$ nach Voraussetzung. Als Funktion in z ist $n(z)$ stetig ($|F(z, w)| > \delta > 0$ auf $\bar{U}_R(0) \times \partial U_\epsilon(w_0)$, damit ist der Integrand beschränkt und punktweise stetig; aus dem Satz der majorisierten Konvergenz folgt die Stetigkeit des Integrals in Abhängigkeit von z). Damit ist $n(z) = 1$ konstant.

Wir wenden den Residuensatz auf $\frac{wF_w(w)}{F(w)}$ an (ähnlich wie Folgerung 2.5.12, (2.5.14)): lokal ist $F(w) = (w - w_0)^m h(w)$ mit $h \neq 0$. Dann folgt

$$\frac{wF_w(w)}{F(w)} = \frac{mw}{w - w_0} + \frac{wh'(w)}{h(w)} = m + \frac{mw_0}{w - w_0} + \frac{wh'(w)}{h(w)}.$$

Das Residuum von $\frac{wF_w}{F}$ ist also mw_0 .

Da wir bereits wissen, dass F im Innern des Integrationsweges nur eine einzige, einfache Nullstelle hat, besagt der Residuensatz, dass

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\epsilon(w_0)} w \frac{F_w(z, w)}{F(z, w)} dw,$$

die einzige Nullstelle von $w \mapsto F(z, w)$ ist.

Außerdem hängt der Integrand und damit nach Satz 2.1.16 auch f holomorph von z ab. □

Sei Y eine Riemannsche Fläche. Wir konstruieren nun für eine endliche Körpererweiterung $L/M(Y)$ eine holomorphe, eigentliche, nicht-konstante Abbildung $p : X \rightarrow Y$, die auf den Funktionskörpern gerade die gegebene Erweiterung ist.

Hierzu verwenden wir den Begriff der Resultante und Diskriminante: sei K ein Körper, $f = \sum_{\nu=0}^d a_\nu t^\nu, g = \sum_{\nu=0}^e b_\nu t^\nu \in K[t]$ Polynome vom Grad d bzw. e . Die *Resultante* von f und g ist definiert als folgende Determi-

nante (der obere Block besteht aus e Zeilen, der untere aus d Zeilen)

$$R(f, g) := \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_d & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & a_0 & \dots & a_d \\ b_0 & \dots & b_e & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & b_0 & \dots & b_e \end{vmatrix}$$

Dann gibt es folgende äquivalente Bedingungen:

- (i) f und g haben einen gemeinsamen Teiler h mit $\deg h \geq 1$, d.h. $f = h\tilde{f}$, $g = h\tilde{g}$ mit $\deg \tilde{f} < d$, $\deg \tilde{g} < e$,
- (ii) es gibt $r, s \in K[t]$ mit $\deg r < e$, $\deg s < d$ mit $rf + sg = 0$ (nämlich $r = \tilde{g}$, $s = \tilde{f}$)
- (iii) die Elemente $f, xf, \dots, x^{e-1}f, g, xg, \dots, x^{d-1}g$ sind K -linear abhängig,
- (iv) $R(f, g) = 0$.

((ii) impliziert (i), denn in der Zerlegung $g = \prod g_i$ in irreduzible Faktoren gilt entweder $g_i|r$ oder $g_i|f$. Falls der erstere Fall für alle i eintritt folgt $g|r$ im Widerspruch zu $\deg r < \deg g = e$.)

Die Diskriminante $\Delta(f) := R(f, f')$ ist also für ein irreduzibles Polynom f nicht 0: denn andernfalls hätte f und f' einen Teiler h mit Grad ≥ 1 .

Satz 4.2.15. Für jede Riemannsche Fläche Y und jede endliche Körpererweiterung $L/\mathcal{M}(Y)$ gibt es eine holomorphe, eigentliche, nicht konstante Abbildung $p : X \rightarrow Y$ mit einem Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{M}(X) \\ & \swarrow & \searrow p^* \\ & \mathcal{M}(Y) & \end{array}$$

Beweis. Die Erweiterung $L/K := \mathcal{M}(Y)$ ist automatisch separabel und damit nach dem Satz von primitiven Element von der Form

$$L = K[t]/P,$$

wobei $P = T^n + c_1T^{n-1} + \dots + c_n \in K[t]$ ein irreduzibles Polynom ist. (Wir können den Leitkoeffizienten durch Division zu 1 machen. Ein solches Polynom heißt *monisch*.)

Sei $\Delta := \Delta(P) \in K$ die Diskriminante von P . Es gilt $\Delta \neq 0$, da P irreduzibel ist. Sei $B \subset Y$ eine diskrete Teilmenge so dass die c_i auf $Y' := Y \setminus B$ holomorph sind und so dass $\Delta(y)$ für $y \in Y'$ nicht verschwindet, d.h. $P(y)$ und $P'(y)$ keinen gemeinsamen Teiler in $\mathbb{C}[T]$ haben, d.h. die Nullstellen von $P(y)$ sind alle einfache Nullstellen.

Wir betrachten das Polynom P als Element von $\mathcal{O}(Y')[T]$, d.h.

$$P(y, T) := T^n + c_1T^{n-1} + \dots + c_n.$$

Wir betrachten die kanonischen Projektionen (die Notation " F' " heißt hier Einschränkung, ausnahmsweise nicht Ableitung):

$$\begin{array}{ccccc} \{w_1, \dots, w_n\} & \longleftarrow & \{x_1, \dots, x_n\} & \longrightarrow & \{y\} \\ & & & & \\ & & \sqcup_{\nu} V & \xleftarrow{\tau_{\nu}} & V \\ & \swarrow \sqcup f_{\nu} & \downarrow & \searrow p' & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xleftarrow{F'} & X' := \{(y, w) \in Y' \times \mathbb{C}, P(y, w) = 0\} & \xrightarrow{p'} & Y' \end{array}$$

Wir zeigen, dass p' eine Überlagerung ist: für fixiertes $y \in Y'$ hat $P(y, T)$ nach Konstruktion n einfache Nullstellen $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ und daher gibt es nach Lemma 4.2.13 (n mal angewendet) eine Umgebung $y \in V \subset Y'$, so dass sich die Nullstellen zu holomorphen Funktionen auf $f_{\nu} \in \mathcal{O}(V)$ fortsetzen, d.h.

$$P(T) = \prod_{\nu=1}^n (T - f_{\nu}).$$

Damit gibt es einen Homöomorphismus $p'^{-1}(V) = \bigsqcup_{\nu} V$, nämlich $V \ni y \mapsto f_{\nu}(y)$.

Wir definieren eine komplexe Struktur auf X' indem wir den lokalen Homöomorphismus p' benutzen, d.h. für eine Riemannsche Fläche Z ist eine Abbildung $\varphi : X' \rightarrow Z$ in $x_i \in X'$ holomorph genau dann, wenn $\tau_{\nu}^* \varphi = \varphi \circ \tau_{\nu} : V \rightarrow Z$ holomorph ist. Insbesondere ist damit die Projektion $F' : X' \rightarrow \mathbf{C}, F'(y, w) := w$ holomorph, denn $\tau_{\nu}^* F' = f_{\nu}$ ist holomorph.

Nach Konstruktion sind die c_1, \dots, c_n gerade die elementarsymmetrischen Funktionen von F' bezüglich der Überlagerung p' .

Außerdem ist X' zusammenhängend, also eine Riemannsche Fläche: wäre $X' = \bigsqcup_i X'_i$, so wäre $p'_i := p'|_{X'_i} : X'_i \rightarrow Y'$ ebenfalls eine Überlagerung. Dann wäre $F'_i := F'|_{X'_i} \in \mathcal{O}(X'_i)$, es würde nach Lemma 4.2.9 ein eindeutiges monisches irreduzibles Polynom $Q_i \in \mathcal{M}(Y)[T]$ mit $Q_i(F'_i) = 0$ geben. Wiederholen wir die Konstruktion der f_{ν} für die Überlagerung p'_i , sind die resultierenden $f_{i,\nu}$ für alle i zusammengenommen gerade die f_{ν} , d.h. $Q_i = \prod(T - f_{i,\nu})$, also

$$P = \prod_i Q_i$$

im Widerspruch zur Irreduzibilität von P .

Nach Satz 4.2.12 gibt es eine Riemannsche Fläche X und eine eigentliche holomorphe Abbildung $p : X \rightarrow Y$, die p' fortsetzt. Außerdem lässt sich nach Lemma 4.2.8 f zu einer meromorphen Funktion $F \in \mathcal{M}(X)$ fortsetzen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{C} & \xleftarrow{F'} & X' & \xrightarrow{p'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P}^1 & \xleftarrow{F} & X & \xrightarrow{p} & Y. \end{array}$$

Sie nimmt wie F für $y \in Y'$ auf $p^{-1}(y)$ n verschiedene Werte an, denn diese Werte sind gerade die Nullstellen von $P(y, T)$, die nach Konstruktion alle einfach, insbesondere also verschieden sind.

Es gilt $\mathcal{M}(X) = L$: nach Konstruktion gilt $P(F') = 0$ (wobei $P(F')$ die Kurzschreibweise für $(p'^*P)(F')$ ist, wobei $p'^* : \mathcal{M}(Y') \rightarrow \mathcal{M}(X')$. Nach dem Identitätssatz gilt also auch $P(F) = 0$. Wir erhalten also einen Homomorphismus von Körpern $K[T]/P \rightarrow \mathcal{M}(X)$. Dieser ist automatisch injektiv. Die Voraussetzung von Lemma 4.2.9(ii) sind erfüllt (die punktgetrennende meromorphe Funktion ist F), d.h. $\deg_K \mathcal{M}(X) = n = \deg_K(K[T]/P)$, d.h. die Abbildung ist auch surjektiv. \square

Satz 4.2.16. *Seien $p : X \rightarrow Z$ und $q : Y \rightarrow Z$ eigentliche holomorphe, nicht konstante Abbildungen. Sei $C \subset Z$ eine diskrete Teilmenge, $Z' := Z \setminus C$, $X' = p^{-1}Z'$, $Y' = q^{-1}Z'$. Sei ferner $f' : X' \rightarrow Y'$ eine holomorphe Abbildung. Dann gibt es (genau) eine holomorphe Fortsetzung f von f' , d.h. eine holomorphe Abbildung, die in folgendes kommutative Diagramm passt:*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\dots f \dots} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ & Z & \end{array} \tag{4.2.17}$$

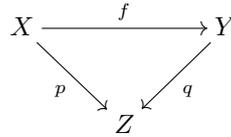
Beweis. Wir wollen den Hebbarkeitssatz (Theorem 3.1.9(iii)) anwenden. Hierfür reicht es für $x \in X \setminus X'$ eine Umgebung U zu finden so dass f' auf $U \setminus \{x\}$ beschränkt ist, d.h. in einer geeigneten Karte von Y beschränkt ist. Sei $z := p(x)$. Wähle eine Fundamentalumgebung $W \ni z$, so dass \overline{W} kompakt ist und in einer Fundamentalumgebung enthalten ist. Sei $U := p^{-1}(W)$, $V := q^{-1}(W)$. Dann ist \overline{V} unter q homöomorph zu einer endlichen disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i=1}^n \overline{W}$, also auch kompakt. Insbesondere ist $f(U \setminus \{x\}) \subset V$ beschränkt. \square

Satz 4.2.18. *Sei*

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\varphi} & L \\ & \searrow & \swarrow \\ & K := \mathcal{M}(Z) & \end{array}$$

ein Diagramm von endlichen Körpererweiterungen für eine Riemannsche Fläche Z . Seien X und Y die im Beweis von Satz 4.2.15 konstruierten Riemannsche Flächen mit $\mathcal{M}(X) \cong M$ und $\mathcal{M}(Y) \cong L$.

Dann gibt es ein kommutatives Diagramm mit einer holomorphen Abbildung f :



so dass f^* bis auf Isomorphismus mit φ übereinstimmt, d.h. so dass

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\varphi} & L \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathcal{M}(X) & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{M}(Y) \end{array} \tag{4.2.19}$$

kommutiert.

Beweis. Wir erhalten für die Erweiterung M/L eine holomorphe Abbildung $f : \tilde{X} \rightarrow Y$, die auf Funktionenkörpern die gegebene Erweiterung liefert. Wir müssen zeigen, dass es einen Isomorphismus $\varphi : X \rightarrow \tilde{X}$ gibt, so dass $q \circ f \circ \varphi = p$ gilt. Wir können durch Ersetzen von Y durch \tilde{X} also annehmen, dass $L = M = K[T]/P$ gilt.

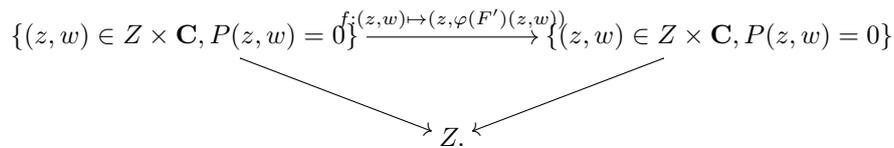
Es reicht hierfür, zu zeigen, dass es eine eindeutige holomorphe Abbildung f gibt mit $q \circ f = p$. (Denn dann erhalten wir analog eine Abbildung g in der umgekehrten Richtung, aus Eindeutigkeitsgründen sind die Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ notwendigerweise die Identität.)

Wegen Satz 4.2.16 genügt es, f im Fall zu konstruieren nachdem wir Z durch eine geeignete offene (dichte) Teilmenge ersetzen (und X durch deren Urbild). Wir wählen dies zunächst so, dass wir in der Situation des obigen Beweises sind, d.h. $X = \{(z, w) \in Z \times \mathbf{C}, P(z, w) = 0\}$.

Um f zu definieren, verwenden wir die holomorphe Funktion $F' : X \rightarrow \mathbf{C}$, die wir im obigen Beweis konstruiert haben. Wir bezeichnen mit $\varphi(F')$ das eindeutige Element auf welches $F' \in \mathcal{M}(X)$ unter

$$\mathcal{M}(X) \xrightarrow{\cong} L \xleftarrow{\varphi} L \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(X)$$

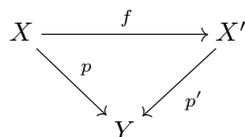
abbildet. Wir hatten im obigen Beweis gezeigt, dass $P(F') = 0 \in \mathcal{M}(X)$ gilt. Da φ ein Körperhomomorphismus ist, gilt auch $P(\varphi(F')) = 0$. Falls nötig, ersetzen wir Z derart durch eine offene dichte Teilmenge (und X durch ihr Urbild), dass $\varphi(F')$ auf X nicht nur meromorph, sondern holomorph ist. Dann kommutiert folgendes Diagramm und zeigt die Existenz einer Abbildung f mit den gewünschten Eigenschaften:



Um die Eindeutigkeit von f zu sehen nutzen wir, dass eine Abbildung f zwischen Überlagerungen ist nach Satz 4.1.20 bereits durch den Wert auf einer Faser festgelegt ist. Falls \tilde{f} eine zweite Abbildung ist, ist $f(x) = \tilde{f}(x)$, denn die meromorphe Funktion $F : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ die im obigen Beweis konstruiert wurde, trennt die Punkte in den Fasern von p , d.h. $F(f(x)) = F(\tilde{f}(x))$ impliziert $f(x) = \tilde{f}(x)$. Erstere Gleichheit gilt jedoch wegen $F \circ f = f^* F = \tilde{f}^* F$, da $f^* = \varphi = \tilde{f}^*$ (im Sinne dessen, dass (4.2.19) für f^* und analog \tilde{f}^* kommutiert). \square

Sei Y eine fixierte Riemannsche Fläche und $K := \mathcal{M}(Y)$ ihr Funktionenkörper. Fassen wir noch einmal die bisherigen Ergebnisse zusammen: wir betrachten zwei Kategorien

- Objekte der ersten Kategorie sind Abbildungen (!) $p : X \rightarrow Y$, wobei X eine Riemannsche Fläche ist und p eigentlich und holomorph und nicht konstant ist. Morphismen zwischen zwei solchen Objekten sind holomorphe Abbildungen $f : X \rightarrow X'$, so dass das naheliegende Dreieck kommutiert, d.h. $p' \circ f = p$:



2. Objekte der zweiten Kategorie sind endliche Körpererweiterungen L/K . Morphismen zwischen zwei solchen Objekten sind Körperhomomorphismen $\varphi : L \rightarrow L'$, die auf dem Teilkörper $K \subset L$ (bzw. $K \subset L'$) die Identität sind, d.h. so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} L & \xleftarrow{\varphi} & L' \\ & \searrow & \swarrow \\ & K & \end{array}$$

Wir haben nach Lemma 4.2.9 einen *kontravarianten* Funktor von der ersten zur zweiten, die auf Objekten durch

$$(p : X \rightarrow Y) \mapsto (\mathcal{M}(Y) = K \xrightarrow{p^*} \mathcal{M}(X))$$

gegeben ist und auf Morphismen durch

$$\left(\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & Y & \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(X) & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{M}(X') \\ & \swarrow p^* & \searrow p'^* \\ & \mathcal{M}(Y) & \end{array} \right).$$

Nach Satz 4.2.15 ist der Funktor essentiell surjektiv und er nach Satz 4.2.18 *voll*, d.h. surjektiv auf Hom-Mengen. Um eine Äquivalenz von Kategorien zu sein, fehlt nach Übungsaufgabe 4.3.3 noch folgendes:

Satz 4.2.20. Für $p : X \rightarrow Z$ und $q : Y \rightarrow Z$ holomorph, eigentlich, nicht konstant ist

$$\mathrm{Hom}_Z(X, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(Z)}(\mathcal{M}(Y), \mathcal{M}(X))$$

injektiv.

Wir beweisen dies unter folgender Annahme: für jedes $q : Y \rightarrow Z$ gibt es eine meromorphe Funktion $F : Y \rightarrow \mathbf{P}^1$ die die Punkte in $q^{-1}(z)$ für ein $z \in Z$ trennt, d.h. $F(y_i) \neq F(y_j)$ für $y_i \neq y_j$ in $q^{-1}(z)$. Dieser Satz heißt Riemannscher Existenzsatz, wir werden ihn für kompakte Riemannsche Flächen als Folgerung aus dem Satz von Riemann-Roch beweisen (siehe Folgerung 7.2.5).

Beweis. Wie im Beweis von Satz 4.2.18 können wir annehmen, dass p und q Überlagerungen sind, und dann eine meromorphe Funktion nutzen, die die Punkte in $q^{-1}(z)$ trennt. \square

4.3 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 4.3.1. Ein Charakter von \mathbf{C}^\times ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus

$$\chi : \mathbf{C}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times.$$

Zeige, dass jeder Charakter von der Form

$$\chi : z \mapsto z^N \cdot |z|^s$$

mit $N \in \mathbf{Z}$ und $s \in \mathbf{C}$. (Wie üblich ist hierbei $|z|^s := \exp(s \log |z|)$, wobei \log der gewöhnliche Logarithmus einer reellen Zahl ist.)

Übungsaufgabe 4.3.2. Sei $Y = \mathbf{P}^1$. Definiere $K := \mathcal{M}(Y) = \mathbf{C}(z)$ und $L := K[t]/(t^2 - z^5 + z)$.

1. Konstruiere eine Riemannsche Fläche X und eine holomorphe, eigentliche nicht konstante Abbildung $p : X \rightarrow Y$, so dass $\mathcal{M}(X) \cong L$.
2. Gib die Stellen an, an denen die Abbildung $p : X \rightarrow Y$ verzweigt ist.

(*Tipps:* Berechne die Diskriminante von $t^2 - z^5 + z \in K[t]$.)

Übungsaufgabe 4.3.3. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor zwischen Kategorien. Zeige, dass F eine Äquivalenz von Kategorien ist genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mathrm{Hom}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$, für alle $X, Y \in \mathcal{C}$ (man sagt, " F ist volltreu").

2. Für alle $Z \in \mathcal{D}$, existiert ein $X \in \mathcal{C}$ mit $F(X) \cong Z$ (man sagt, “ F ist *essentiell surjektiv*”).

Übungsaufgabe 4.3.4. Definiere $\mathbb{R}P^n := S^n / (z \sim -z)$. Man nennt $\mathbb{R}P^n$ auch den n -dimensionalen *reell-projektiven Raum*. Wir versehen $\mathbb{R}P^n$ mit der Quotiententopologie.

1. Zeige, dass die kanonische Projektion $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^1$ für $n = 1$ ein Homöomorphismus und für $n > 1$ eine universelle Überlagerung ist.
2. Folgere

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & n = 1 \\ \mathbf{Z}/2 & n > 1. \end{cases}$$

Übungsaufgabe 4.3.5. Ein *Origami*

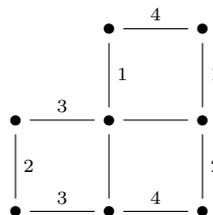
$$O := (X \xrightarrow{p} E)$$

ist eine holomorphe eigentliche, nicht konstante Abbildung p von einer Riemannschen Fläche X nach $E := \mathbf{C}/\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$, die über höchstens einem Punkt $e \in E$ verzweigt ist, d.h. höchstens in $p^{-1}(e)$ verzweigt ist. Der Grad eines Origamis $O = (X \xrightarrow{p} E)$ ist definiert als der Grad von p .

Ein *kombinatorisches Origami* ist eine endliche Vereinigung von Einheitsquadraten $[0, 1] \times [0, 1]$ in \mathbf{R}^2 , die längs der Ränder miteinander verklebt werden, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- jede linke Kante wird mit einer rechten Kante verklebt
- jede obere Kante wird mit einer unteren Kante verklebt
- die Fläche X , die durch Verkleben dieser Kanten entsteht, ist zusammenhängend.

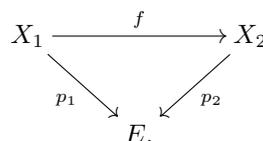
Konstruiere zu einem kombinatorischen Origami ein Origami und umgekehrt. Skizziere die Fläche, die zum kombinatorischen Origami



gehört, wobei jeweils die Kanten mit den gleichen Beschriftungen miteinander verklebt werden. Was ist der Grad dieses Origamis?

Übungsaufgabe 4.3.6. Wende Satz 4.2.12 an, um einem Polytop eine Riemannsche Fläche zuzuordnen.

Übungsaufgabe 4.3.7. Zwei Origamis $O_1 = (X_1 \xrightarrow{p_1} E)$ und $O_2 = (X_2 \xrightarrow{p_2} E)$ heißen äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus f gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:



Setze $E^\times := E \setminus \{e\}$. Im folgenden sei als bekannt vorausgesetzt, dass

$$\pi_1(E^\times) = F_2,$$

die freie Gruppe in zwei Erzeugern ist.

1. Sei O vom Grad d . Konstruiere einen natürlichen Gruppenhomomorphismus $F_2 \rightarrow \Sigma_d$ von der freien Gruppe F_2 in zwei Erzeugern zur symmetrischen Gruppe in d Buchstaben.
2. Etabliere mittels Satz 4.1.24 eine Bijektion zwischen Äquivalenzklassen von Origamis vom Grad d und Konjugationsklassen von Paaren $(\sigma, \tau) \in \Sigma_d \times \Sigma_d$. (Zwei solche Paare (σ_i, τ_i) , $i = 1, 2$ heißen konjugiert, falls es $\rho \in \Sigma_d$ gibt mit $\rho\sigma_1\rho^{-1} = \sigma_2$ und $\rho\tau_1\rho^{-1} = \tau_2$.)
3. Folgere eine Bijektion zwischen Äquivalenzklassen von Origamis vom Grad d und Konjugationsklassen von Untergruppen $U \subset F_2$ vom Index d (d.h. F_2/U hat d Elemente).

Übungsaufgabe 4.3.8. Sei $X = \mathbf{C}/\Lambda$ eine elliptische Kurve. Fixiere $e \in X$.

1. Gib eine universelle Überlagerung $p : E \rightarrow X$ an.

2. Zeige

$$\pi_1(X, e) \cong \mathbf{Z}^2.$$

3. Beschreibe die Wirkung der beiden Erzeuger von $\pi_1(E, e)$ auf $F_e := p^{-1}(e)$.

4. Klassifiziere die Überlagerungen von X .

Übungsaufgabe 4.3.9. Berechne die Diskriminante von $f(x) = x^3 + ax + b$.

Kapitel 5

Garben und Garbenkohomologie

5.1 Definitionen

Bemerkung 5.1.1. In Beispiel 2.2.13 hatten wir gesehen, dass die Gleichung

$$\exp(f(z)) = z$$

auf jedem *einfach zusammenhängenden* Gebiet $G \subset \mathbf{C}^\times$ eine Lösung hat, nämlich einen Zweig des Logarithmus von f . Wir können natürlich \mathbf{C}^\times durch einfach zusammenhängende Gebiete überdecken, d.h. obige Gleichung auf ganz \mathbf{C}^\times *lokal* lösen. Dennoch gibt es auf ganz \mathbf{C}^\times *keine* solche Funktion: andernfalls wäre der (wegen der Stetigkeit von f) stetige Weg $f(S^1)$ nullhomotop, da \mathbf{C} einfach zusammenhängend ist. Das Bild dieser Homotopie unter der stetigen Abbildung \exp würde eine Nullhomotopie von $\exp(f(S^1)) = S^1$ liefern – angesichts $\int_{S^1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$ ein Widerspruch zum Cauchyschen Integralsatz (Satz 2.2.5).

Wir werden nun den Begriff der *Garbe* einführen, der ein systematischeres Studium solcher Situationen ermöglicht. Grob gesagt eignen sich Garben (und auch Garbenkohomologie), um folgende Fragen zu beantworten: welche Gleichungen (oder Differentialgleichungen), die sich lokal lösen lassen, können auch global gelöst werden?

Notation 5.1.2. In diesem Kapitel sei, wenn nichts anderes gesagt wird, X ein topologischer Raum und $U \subset X$ offen.

Definition 5.1.3. Ein *kovarianter Funktor* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwischen zwei Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} ist eine Abbildung $F : \text{ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{D})$, sowie

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)),$$

die mit der Komposition verträglich ist und id_X auf $\text{id}_{F(X)}$ abbildet.

Ein *kontravarianter Funktor* ist analog definiert, nur dass

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X)).$$

Man schreibt dann $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{D}$.

Beispiel 5.1.4. Ein topologischer Raum X liefert eine Kategorie $\text{Op}(X)$: die Objekte sind die offenen Teilmengen $U \subset X$ und

$$\text{Hom}_{\text{Op}(X)}(U, V) := \begin{cases} * & U \subset V \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Abelsche Gruppen mit Gruppenhomomorphismen bilden ebenfalls eine Kategorie **Ab**. Ringe (oder auch kommutative Ringe) mit Ringhomomorphismen bilden eine Kategorie.

Definition 5.1.5. Eine *Prägarbe* F auf X (genauer eine Prägarbe abelscher Gruppen) ist ein kontravarianter Funktor

$$F : \text{Op}(X)^{\text{opp}} \rightarrow \mathbf{Ab}.$$

Bemerkung 5.1.6. Eine Prägarbe besteht also aus dem Datum einer abelschen Gruppe $F(U)$ für jede offene Teilmenge $U \subset X$, zusammen mit sog. *Restriktionsabbildungen*

$$\iota_{UV} : F(U) \rightarrow F(V),$$

für alle ineinander enthaltenen offenen Mengen $V \subset U \subset X$. Diese sollen erfüllen:

- $\iota_{U,U} = \text{id}_{F(U)}$

- Falls $W \subset V \subset U$, so ist $\iota_{UW} = \iota_{VW} \circ \iota_{UV}$.

Für $f \in F(U)$ schreibt man auch $f|_V$ für $\iota_{UV}(f) \in F(V)$.

Definition 5.1.7. Eine *Kettenkomplex* ist eine Folge

$$\dots \rightarrow A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n+1} \rightarrow \dots$$

von abelschen Gruppen A_n und Gruppenhomomorphismen d_n , so dass $d_n \circ d_{n-1} = 0$ gilt. Ein solcher Komplex heißt *exakt*, wenn

$$\ker d_n = \operatorname{im} d_{n-1}$$

für alle n .

Definition 5.1.8. Eine Prägarbe F heißt *Garbe*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Für jede offene Menge U und eine Familie von offenen Teilmengen $U_i \subset U$ ist die Sequenz

$$0 \rightarrow F(U) \xrightarrow{\iota_{U, U_i}} \prod_i F(U_i) \rightarrow \prod_{ij} F(U_i \cap U_j)$$

exakt. Hierbei ist die zweite Abbildung gegeben durch $(f_i \in F(U_i)) \mapsto (f_i|_{U_i \cap U_j} - f_j|_{U_i \cap U_j})$. Mit anderen Worten: gegeben ein Element $f \in F(U)$, so dass $f|_{U_i} = 0$, dann ist $f = 0$. Außerdem: gegeben eine Familie $f_i \in F(U_i)$ so dass $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, dann gibt es ein $f \in F(U)$ so dass $f_i = f|_{U_i}$.

Beispiel 5.1.9. 1. Für einen fixierten topologischen Raum Y (z.B. $Y = \mathbf{R}$ oder \mathbf{C}) ist die Zuordnung $U \mapsto C(U, Y)$ (stetige Funktionen von U nach Y), mit ihren natürlichen Restriktionsabbildungen eine Garbe. Das gleiche gilt für $\mathcal{O}(U)$, falls $X \subset \mathbf{C}$ offen ist.

2. Die Prägarbe $U \mapsto C^b(U)$ (beschränkte stetige Funktionen) ist eine Prägarbe, aber z.B. auf $X = \mathbf{R}$ *keine* Garbe: Funktionen, die lokal (z.B. auf $(-N, N)$, $N \in \mathbf{N}$) beschränkt sind, lassen sich nicht notwendigerweise zu einer auf ganz X beschränkten Funktion verkleben.

3. Die sog. *konstante Prägarbe* ist definiert durch $U \mapsto F(U) := A$, und als Restriktionsabbildung id_A , für eine fixierte abelsche Gruppe A . Sie ist i.A. *keine* Garbe. Im Gegenteil gilt für jede Garbe F

- $F(\emptyset) = 0$, da \emptyset durch die leere Familie überdeckt wird.
- Damit gilt für beliebige *disjunkte* offene Teilmengen U_i :

$$F(\bigsqcup U_i) = \prod_i F(U_i).$$

4. Fixiere eine abelsche Gruppe A . Wir fassen sie als topologischen Raum mit der diskreten Topologie auf (d.h. jede Teilmenge ist offen). Die sog. *konstante Garbe* (zu A) ist definiert durch $U \mapsto C(U, A)$. Dies ist äquivalent zu: $U \mapsto A^{\pi_0(U)} := \prod_{\pi_0(U)} A$, das Produkt über die Zusammenhangskomponenten von U .

Wir werden oft verschiedene Garben miteinander in Beziehung setzen und definieren hierzu:

Definition 5.1.10. Ein *Morphismus von Prägarben* $a : F \rightarrow G$ ist eine natürliche Transformation von Funktoren $\operatorname{Op}(X)^{\operatorname{opp}} \rightarrow \mathbf{Ab}$, d.h. eine Abbildung $a(U) : F(U) \rightarrow G(U)$ für alle $U \subset X$ derart, dass für $V \subset U$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{a(U)} & G(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(V) & \xrightarrow{a(V)} & G(V) \end{array}$$

kommutiert. Ein *Morphismus von Garben* ist, nach Definition, ein Morphismus von Prägarben.

5.2 Halme und exakte Sequenzen von Garben

In verschiedenen Situationen möchte man Funktionen auf einer ‘beliebig kleinen Umgebung’ eines Punktes betrachten. Um diese Idee zu formalisieren führen wir folgende Begriffe ein:

Definition 5.2.1. Sei F eine Prägarbe auf X und $x \in X$. Der *Halm* von F in x , Notation F_x ist definiert als

$$F_x := \bigsqcup_{x \in U} F(U) \Big/ \sim, \quad (5.2.2)$$

wobei $f \in F(U)$ mit $g \in F(V)$ identifiziert wird wenn $f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$ gilt.

Für $f \in F(U)$ schreiben wir f_x für das Bild von f in F_x . Analog für eine Abbildung von (Prä-)Garben $a : F \rightarrow G$ ist $a_x : F_x \rightarrow G_x$ die induzierte Abbildung auf einem Halm.

Bemerkung 5.2.3. Wir bezeichnen die rechte Seite von (5.2.2) auch als *Kolimes* (genauer *filtrierten Kolimes*, manche Autoren verwenden auch die Bezeichnung *direkter Limes*):

$$\operatorname{colim}_{x \in U} F(U).$$

Der Halm ist auf natürliche Weise eine abelsche Gruppe (Übungsaufgabe 5.4.7).

Beispiel 5.2.4. Für die konstante Garbe zu A gilt: $A_x = A$.

Der Halm der holomorphen Funktionen wurde in Übungsaufgabe 2.7.14 besprochen.

Satz 5.2.5. Sei

$$F_1 \xrightarrow{a} F_2 \xrightarrow{b} F_3$$

eine Sequenz von Garben, d.h. a und b sind Garbenmorphismen mit $b \circ a = 0$ (d.h. $b(a(f)) = 0$ für U und alle $f \in F_1(U)$). Dann sind folgende Bedingungen äquivalent. Wenn sie erfüllt sind, nennen wir die Sequenz eine exakte Sequenz von Garben.

(i) Die Sequenz der Halme

$$(F_1)_x \xrightarrow{a_x} (F_2)_x \xrightarrow{b_x} (F_3)_x$$

ist exakt (d.h. $\ker b_x = \operatorname{ima}_x$) für alle Punkte $x \in X$.

(ii) Für jedes U und jedes $f \in F_2(U)$ mit $b(f) = 0 \in F_3(U)$ gibt es eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ und $g_i \in F_1(V_i)$ so dass $a(g_i) = f|_{V_i}$ für alle i .

Beweis. Wir zeigen nur (i) \Rightarrow (ii), die Umkehrung ist eine Übungsaufgabe.

Sei $x \in U$ ein beliebiger Punkt. Sei $f \in F_2(U)$, $b(f) = 0$. Da $(F_1)_x \rightarrow (F_2)_x \rightarrow (F_3)_x$ exakt ist, d.h. $\ker b_x = \operatorname{ima}_x$, gibt es eine offene Umgebung $U \supset V_x \ni x$ und $g^{(x)} \in F_1(V^{(x)})$ mit $a(g^{(x)}) = f|_{V^{(x)}}$. Die V_x überdecken U , damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Folgerung 5.2.6. Eine Sequenz von Garben

$$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{a} F_2 \xrightarrow{b} F_3 \rightarrow 0$$

ist exakt (d.h. $0 \rightarrow (F_1)_x \xrightarrow{a_x} (F_2)_x \xrightarrow{b_x} (F_3)_x \rightarrow 0$ ist exakt für alle $x \in X$) genau dann, wenn

$$0 \rightarrow F_1(U) \xrightarrow{a(U)} F_2(U) \xrightarrow{b(U)} F_3(U) \quad (5.2.7)$$

exakt ist und es für jedes $f \in F_3(U)$ eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ und $g \in F_2(V_i)$ gibt so dass $b(g) = f|_{V_i}$ für alle i . (Die erste Aussage fasst man auch zusammen indem man sagt der sog. globale Schnittfunktor $\Gamma : \mathbf{Shv}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$, $F \mapsto F(X)$ ist links-exakt.)

Beweis. Wir zeigen die Implikation \Rightarrow , die Umkehrung ist (mit ähnlichen Argumenten) eine Übungsaufgabe.

Die letzte Aussage folgt aus Satz 5.2.5, angewandt auf $F_2 \rightarrow F_3 \rightarrow 0$. Wir wenden Satz 5.2.5 auf $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_2$ an und erhalten die Injektivität von $F_1(U) \rightarrow F_2(U)$. Wir wenden Satz 5.2.5 auf $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3$ an und erhalten für $f \in F_2(U)$ mit $b(f) = 0$: $U = \bigcup V_i$, $F_1(V_i) \ni g_i \xrightarrow{a} f|_{V_i}$. Falls $W = V_i \cap V_j \neq \emptyset$, so bilden $g_i|_W$ und $g_j|_W$ auf $f|_W$ ab, wegen der Injektivität von $F_1(W) \rightarrow F_2(W)$ und dem Garbenaxiom für F_1 lassen sich die g_i zu einem $g \in F_1(U)$ verkleben. Es gilt $a(g) = f$, da dies auf allen V_i gilt und F_2 eine Garbe ist. \square

Beispiel 5.2.8. Auf $X = \mathbf{C}$ ist die sog. *Exponentialsequenz*

$$0 \rightarrow 2\pi i \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^\times \rightarrow 0$$

exakt. Hierbei ist $\mathcal{O}^\times(U) := \{f : U \rightarrow \mathbf{C}^\times \text{ holomorph}\}$. Die Exaktheit rechts ist eine Umformulierung von Lemma 2.2.11: für $f \in \mathcal{O}^\times(U)$ wähle eine Überdeckung durch einfach zusammenhängende Gebiete $V_i \subset U$ (z.B. offene Bälle), dann hat $f|_{V_i}$ einen Logarithmus. Die Exaktheit von $0 \rightarrow (2\pi i \mathbf{Z})(U) = (2\pi i \mathbf{Z})^{\pi_0(U)} \rightarrow \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}^\times(U)$ folgt daraus, dass für $f \in \mathcal{O}(G)$, G ein Gebiet mit $\exp(f) = 1$ gilt: $f = 2\pi i k$ mit einem eindeutigen $k \in \mathbf{Z}$.

Bemerkung 5.2.9. Wir zeigen nun, dass die Exponentialsequenz auf $X = \mathbf{C}^\times$ folgende exakte Sequenz von abelschen Gruppen induziert:

$$0 \rightarrow 2\pi i\mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^\times(X) \xrightarrow{\delta} 2\pi i\mathbf{Z} \rightarrow 0. \quad (5.2.10)$$

(Hieran sehen wir auch, dass für eine exakte Sequenz von Garben (5.2.7) die Sequenz der globalen Schnitte nicht notwendig exakt sein muss.)

$$\begin{array}{ccc} & & f \\ & & \downarrow \\ (l^+, l^-) & \xrightarrow{\exp} & (f^+, f^-) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (k^+, k^-) & \xrightarrow{\exp} & 1 \end{array}$$

Um δ zu definieren, betrachten wir die offene Überdeckung

$$X = U^+ \cup U^-,$$

wobei $U^+ = \mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{R}, z \leq 0\}$ und $U^- = \mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{R}, z \geq 0\}$. Dann gilt $U^\pm := U^+ \cap U^- = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Für $f \in \mathcal{O}^\times(X)$ sei f^+ und f^- die Einschränkung von f auf U^+ bzw. U^- . Es gibt nach Lemma 2.2.11 dann $l^+ \in \mathcal{O}(U^+)$ mit $\exp(l^+) = f^+$ und analog ein l^- . Weder l^+ noch l^- sind eindeutig, sondern nur bis auf Addition einer Konstanten in $2\pi i\mathbf{Z}$ festgelegt. Da $f^\pm := f^+|_{U^\pm} = f^-|_{U^\pm}$ sind $l^+|_{U^\pm}$ und $l^-|_{U^\pm}$ beide Logarithmen von f^\pm . Es gilt $\exp(l^+ - l^-) = 1$ auf U^\pm . Es gilt $U^\pm = \mathbf{H} \sqcup -\mathbf{H}$, also gibt es (wiederum nach Lemma 2.2.11) ein eindeutiges $k^\pm \in 2\pi i\mathbf{Z}$ mit $l^+ - l^- = k^+$ auf \mathbf{H} und ebenso $l^+ - l^- = k^-$ auf $-\mathbf{H}$. Wir definieren

$$\delta(f) := k^+ - k^- \in 2\pi i\mathbf{Z}.$$

Diese Zahl $\delta(f)$ ist von der Wahl von l^+ und l^- unabhängig, denn wenn z.B. $\tilde{l}^+ = l^+ + 2\pi ir$, $r \in \mathbf{Z}$, dann ist $\tilde{l}^+ - l^-|_{\mathbf{H}} = k^+ + 2\pi ir$, $\tilde{l}^+ - l^-|_{-\mathbf{H}} = k^- + 2\pi ir$. Wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung δ .

Es gibt einen globalen Logarithmus, d.h. $l \in \mathcal{O}(X)$ mit $\exp(l) = f$ genau dann, wenn $\delta(f) = k^+ - k^- = 0$ gilt, denn dann verkleben sich l^+ und $l^- + k^+$ zu einer (holomorphen) Funktion auf ganz X . Dies zeigt die Exaktheit an der Stelle $\mathcal{O}^\times(X)$. Für die Exaktheit ganz rechts, d.h. die Surjektivität von $\mathcal{O}^\times(X) \rightarrow 2\pi i\mathbf{Z}$ genügt es,

$$\delta(z) = -2\pi i$$

zu zeigen. Betrachte hierzu $l^+(z) = \log|z| + i\arg z$, wobei $-\pi < \arg z < \pi$. Analog $l^-(z) = \log|z| + ia\tilde{\arg} z$ mit $0 < a\tilde{\arg} z < 2\pi$. Dann ist $i(\arg(i) - a\tilde{\arg}(i)) = i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = 0$ und $k^- = i(\arg(-i) - a\tilde{\arg}(-i)) = i(-\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\pi) = -2\pi i$, d.h. $k = k^+ - k^- = -2\pi i$.

5.3 Čech-Kohomologie

Die Gruppe $2\pi i\mathbf{Z}$, die ganz rechts in (5.2.10) auftaucht ist ein Beispiel einer sog. Kohomologiegruppe, nämlich $H^1(\mathbf{C}^\times, 2\pi i\mathbf{Z})$. Diese werden wir nun einführen, siehe auch Übungsaufgabe 5.4.6.

Definition 5.3.1. Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{U} = \{(U_i)_{i \in I}\}$ eine offene Überdeckung, d.h. $U_i \subset X$ ist offen und $\bigcup_i U_i = X$. Sei F eine Prägarbe auf X .

Für $n \geq 0$ definieren wir

$$C^n(\mathfrak{U}, F) := \prod_{i_0, \dots, i_n \in I} F(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n})$$

(Insbesondere ist $C^0(\mathfrak{U}, F) = \prod_i F(U_i)$.) Ferner definieren wir sog. *Randabbildungen* als

$$d^n : C^n(\mathfrak{U}, F) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{U}, F)$$

indem wir ein Tupel (f_{i_0, \dots, i_n}) auf das Tupel abbilden, was im Eintrag $(j_0, \dots, j_n, j_{n+1})$ den Wert

$$\sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r f_{j_0, \dots, j_{r-1}, \hat{j}_r, j_{r+1}, \dots, j_{n+1}}$$

hat. Hierbei haben wir die Restriktion auf $U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_{r+1}}$ in der Notation weggelassen. Außerdem heißt \widehat{j}_r , dass der r -te Eintrag weggelassen wird. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} d^0((f_i)_{i \in I}) &= ((f_j - f_i))_{i,j \in I}, \\ d^1((f_{ij})) &= f_{ij} - f_{ik} + f_{jk}. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Man prüft nach (Übungsaufgabe) dass

$$d^{n+1} \circ d^n = 0,$$

d.h. wir erhalten einen Kettenkomplex, den sog. *Čech-Komplex*. Wir können also seine Kohomologie definieren:

$$H^n(\mathfrak{U}, F) := \ker(C^n(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{d^n} C^{n+1}(\mathfrak{U}, F)) / \operatorname{im}(C^{n-1}(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{d^{n-1}} C^n(\mathfrak{U}, F)).$$

Diese Gruppe heißt n -te *Čech-Kohomologie* von F bezüglich der Überdeckung \mathfrak{U} .

Für praktische Berechnungen, wie z.B. in Übungsaufgabe 5.4.6, ist folgendes Lemma nützlich:

Lemma 5.3.3. *Sei X ein topologischer Raum, $\mathfrak{U} = \{(U_i)_{i \in I}\}$ eine offene Überdeckung von X und die Indexmenge I sei versehen mit einer Wohlordnung " \leq " (reflexiv, transitiv und vollständig, d.h. für alle $i, j \in I$ gilt $i \leq j$ oder $j \leq i$ und jede nichtleere Teilmenge $J \subset I$ habe ein kleinstes Element).*

Betrachte den sog. geordneten Čech-Komplex

$$\overline{C}^n(\mathfrak{U}, F) := \prod_{i_0 < i_1 < \dots < i_n} F(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n})$$

mit Differential

$$d((f_{i_0, \dots, i_n})) = \left(\sum_{r=0}^{n+1} f_{j_0, \dots, \widehat{j}_r, \dots, j_{n+1}} \right)_{j_0, \dots, j_{n+1}}.$$

Sei $i := (i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1}$. Falls alle i_k paarweise verschieden sind sei $\sigma \in \Sigma_{n+1}$ die eindeutige Permutation, so dass $\sigma(i)$ geordnet ist, d.h. $\sigma(i_0) < \dots < \sigma(i_n)$. Betrachte, die Abbildung $C^n(\mathfrak{U}, F) \mapsto \overline{C}^n(\mathfrak{U}, F)$, die in der Komponente

$$F(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}) \rightarrow F(U_{\sigma(i_0)} \cap \dots \cap U_{\sigma(i_n)})$$

die Multiplikation mit $\operatorname{sgn}(\sigma)$ ist und alles auf Null abbildet, wenn die i_k nicht paarweise verschieden sind. Diese Abbildung ist ein Morphismus von Kettenkomplexen und induziert einen Isomorphismus

$$H^n(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{\cong} H^n(\overline{C}^*(\mathfrak{U}, F)).$$

Beweis. Siehe z.B. [God73, §I.3.8]. □

Definition 5.3.4. Eine (offene) Überdeckung $\mathfrak{V} = \{V_j\}$ von X heißt *feiner* als eine Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, wenn jedes V_j in einem U_i enthalten ist.

Sei F eine Prägarbe auf X . In diesem Fall liefern die Restriktionsabbildungen eine Abbildung von Kettenkomplexen $C^*(\mathfrak{U}, F) \rightarrow C^*(\mathfrak{V}, F)$ und eine induzierte Abbildung auf den Kohomologiegruppen $H^*(\mathfrak{U}, F) \rightarrow H^*(\mathfrak{V}, F)$. Die Čech-Kohomologie einer Prägarbe F auf X ist definiert als der filtrierte Kolimes über alle Überdeckungen:

$$H^n(X, F) := \operatorname{colim}_{\mathfrak{U}} H^n(\mathfrak{U}, F).$$

Hierbei ist, wie bei der Definition des Halmes (Definition 5.2.1) der filtrierte Kolimes (auch "direkter Limes") folgendermaßen definiert:

$$\bigsqcup_{\mathfrak{U}} H^n(\mathfrak{U}, F) / \sim,$$

wobei die disjunkte Vereinigung über alle Überdeckungen läuft und $a \in H^n(\mathfrak{U}, F)$ mit $a' \in H^n(\mathfrak{U}', F)$ identifiziert wird, wenn ihr Bild in $H^n(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}', F)$ übereinstimmt, wobei $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}'$ die Überdeckung ist, die durch Schneiden der $U \in \mathfrak{U}$ und $U' \in \mathfrak{U}'$ entsteht.

Der Kolimes in der Definition von $H^n(X, F)$ ist nötig, um "zu grobe" Überdeckungen auszuschließen. Für konkrete Berechnungen ist folgende Tatsache relevant:

Lemma 5.3.5. *Sei F eine Garbe auf X und sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ eine offene Überdeckung von X .*

5.4 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 5.4.1. 1. Sei $n \in \mathbf{N}$. Definiere

$$\mu_n := \{f : U \rightarrow \mathbf{C}^\times : f \text{ holomorph, } f(z)^n = 1 \text{ für alle } z \in \mathbf{C}\}.$$

Zeige, dass

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathcal{O}^\times \xrightarrow{f \mapsto f^n} \mathcal{O}^\times \rightarrow 1$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben auf \mathbf{C} ist.

2. Sei $z \in G \subseteq \mathbf{C}$ ein Gebiet. Zeige, dass die kanonische Abbildung zum Halm (Übungsaufgabe 2.7.14)

$$\mathcal{O}(G) \rightarrow \mathcal{O}_z$$

injektiv ist.

Übungsaufgabe 5.4.2. Sei $\phi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ ein Morphismus von Garben auf einem topologischen Raum X . Wir definieren eine Prägarbe \mathcal{F} durch

$$\mathcal{F}(U) := \ker(\phi(U) : \mathcal{F}_1(U) \rightarrow \mathcal{F}_2(U)), \quad U \subseteq X \text{ offen.}$$

Zeige, dass die Prägarbe \mathcal{F} eine Garbe ist. Sie wird auch als $\ker \phi$ bezeichnet.

Übungsaufgabe 5.4.3. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen.

1. Für eine Garbe \mathcal{F} auf X definiere

$$(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U)), \quad U \subseteq Y.$$

Zeige, dass $f_*\mathcal{F}$ eine Garbe auf Y ist. Sie heißt *direkte Bildgarbe* (von \mathcal{F} unter f).

2. Sei $i : Z \hookrightarrow X$ die Inklusion einer abgeschlossenen Teilmenge von X . Zeige,

$$(i_*\mathcal{F})_x := \begin{cases} 0, & x \notin Z \\ \mathcal{F}_x, & x \in Z \end{cases}$$

3. Sei $j : U \hookrightarrow X$ die Inklusion einer offenen Teilmenge von X und \mathcal{F} eine Garbe auf U . Definiere eine Prägarbe $j_!\mathcal{F}$ wie folgt (wobei $V \subseteq U$):

$$(j_!\mathcal{F})(V) := \begin{cases} \mathcal{F}(V), & V \subseteq U \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeige, dass $j_!\mathcal{F}$ eine Garbe auf X ist und

$$(j_!\mathcal{F})_x := \begin{cases} 0, & x \notin U \\ \mathcal{F}_x, & x \in U \end{cases}$$

Übungsaufgabe 5.4.4. 1. Sei $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ eine Sequenz von abelschen Gruppen. Zeige, dass die Sequenz genau dann exakt ist, wenn f injektiv ist.

2. Sei $A \xrightarrow{g} B \rightarrow 0$ eine Sequenz von abelschen Gruppen. Zeige, dass die Sequenz genau dann exakt ist, wenn g surjektiv ist.

3. Sei

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen (bzw. K -Vektorräumen, wobei K ein Körper ist). Man sagt, dass die Sequenz *spaltet*, falls ein Homomorphismus $\delta : C \rightarrow B$ mit $g \circ \delta = \text{Id}_C$ existiert. Zeige, dass jede kurze exakte Sequenz von K -Vektorräumen spaltet.

4. Gib ein Beispiel einer kurzen exakten Sequenz von abelschen Gruppen an, die nicht spaltet.

Übungsaufgabe 5.4.5. Sei $I = (a, b) \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und $F = A$ die konstante Garbe für eine fixierte abelsche Gruppe A . Zeige

$$H^n(I, A) = \begin{cases} A & n = 0, \\ 0 & n > 0. \end{cases}$$

Tipp: berechne $H^n(\mathcal{U}, A)$ für eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}$ mit $U_i = (a_i, b_i)$, so dass jeder Punkt $x \in (a, b)$ in höchstens zwei der U_i enthalten ist. Zeige dann, dass sich jede Überdeckung zu einer solchen Überdeckung verfeinern lässt.

Übungsaufgabe 5.4.6. Es sei bekannt (wir zeigen dies in Folgerung 6.4.3), dass für jeden topologischen Raum X , der zu \mathbf{C} homöomorph ist, gilt:

$$H^n(X, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}.$$

Zeige hiermit:

1.

$$H^n(\mathbf{C}^\times, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = 0 \\ \mathbf{Z} & n = 1 \\ 0 & n > 1. \end{cases}$$

2. Sei $X = \mathbf{C}/\Lambda$ eine elliptische Kurve, d.h. $\Lambda \subset \mathbf{C}$ ein Gitter. Dann gilt

$$H^n(X, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = 0 \\ \mathbf{Z}^2 & n = 1 \\ \mathbf{Z} & n = 2 \\ 0 & n > 2. \end{cases}$$

Übungsaufgabe 5.4.7. Sei I eine nicht-leere Menge, versehen mit einer reflexiven und transitiven Relation “ \leq ”, die folgende Bedingungen erfüllt: für zwei beliebige $i, j \in I$ gibt es ein $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$. Wir betrachten I als Kategorie, deren Objekte die Elemente von I sind und deren Morphismen gegeben sind durch

$$\text{Hom}(i, j) = \begin{cases} \{*\} & i \leq j \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}.$$

Sei $F : I \rightarrow \mathbf{Ab}$ ein Funktor von I in die Kategorie der abelschen Gruppen (alternativ der Vektorräume über einem fixierten Körper), d.h. für jedes $i \in I$ eine abelsche Gruppe $F(i)$ sowie für je zwei $i \leq j$ Gruppenhomomorphismen $f_{ij} : F(i) \rightarrow F(j)$ mit $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ für $i \leq j \leq k$.

Der *filtrierte Kolimes* von F ist definiert als

$$\text{colim } F := \text{colim}_{i \in I} F(i) := \bigoplus_{i \in I} F(i) / \left((0, \dots, \underbrace{x_i}_{\in F(i)}, \dots, 0) - (0, \dots, \underbrace{f_{ij}(x_i)}_{\in F(j)}, \dots, 0), i \in I, i \leq j, x_i \in F(i) \right).$$

(Insbesondere ist dies eine abelsche Gruppe.)

1. Betrachte auf $\bigsqcup_{i \in I} F(i)$ die Relation \sim definiert durch $F(i) \ni x_i \sim f_{ij}(x_i) \in F(j)$, wobei wieder $i \leq j$ beliebig und x_i beliebig. Zeige dann, dass die natürliche Abbildung in den eben definierten Kolimes,

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{i \in I} F(i) / \sim &\longrightarrow \text{colim}_{i \in I} F(i) \\ [x_i] &\mapsto (0, \dots, x_i, \dots, 0) \end{aligned}$$

eine Bijektion ist, mittels derer die linke Seite demzufolge eine abelsche Gruppenstruktur erhält.

2. Zeige, dass die resultierende Gruppenstruktur auf $\bigsqcup_{i \in I} F(i) / \sim$ gegeben ist durch

$$[x_i] + [y_j] = [f_{ik}(x_i) + f_{jk}(y_j)],$$

wobei $x_i \in F(i)$, $y_j \in F(j)$ und k beliebig gewählt ist mit $i \leq k$, $j \leq k$.

3. Welche Menge I , welche Relation “ \leq ” und welchen Funktor F muss man wählen, damit man mit den obigen Begriffen den Halm F_x (einer fixierten Garbe F auf einem fixierten Raum X in einem fixierten Punkt x) erhält?

Kapitel 6

Differentialformen

Ein Höhepunkt der elementaren Analysis ist der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung, welcher besagt: Ist F eine Stammfunktion einer stetigen Funktion $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, $[0, 1] \subset U \subset \mathbf{R}$ offen, dann gilt

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0).$$

Der Ausdruck $f(x)dx$ ist ein Beispiel einer sog. 1-Form. Mit einer Sprechweise, die wir in Kürze einführen ist

$$f(x)dx = dF.$$

Dann hat der Hauptsatz die suggestivere Formulierung

$$\int_{[0,1]} dF = \int_{\partial[0,1]} F.$$

Hierbei steht ∂ für den Rand.

Der Cauchysche Integralsatz (Theorem 2.2.4) besagt: für f holomorph und einen nullhomotopen Weg γ gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Die Homotopie $\gamma \sim *$ (die wir hier als glatt voraussetzen, was keine wesentliche Einschränkung ist) liefert eine C^1 -Fläche A mit $\partial A = \gamma$. Es gilt also

$$\int_{\partial A} f(z) dz = 0.$$

Dies lässt sich konzeptionell damit erklären, dass für holomorphes f gilt:

$$d(f(z)dz) = 0$$

und

$$\int_{\partial A} f(z) dz \stackrel{*}{=} \int_A d(f(z)dz) = \int_A 0 = 0.$$

Hierbei ist $d(f(z)dz)$ eine 2-Form und die Gleichheit “ $*$ ” ist ein Spezialfall des sog. Satzes von Stokes.

In diesem Kapitel führen wir in aller Kürze die Differentialformen ein und beweisen den Satz von Stokes in elementaren Fällen. Wir leiten hieraus das Dolbeault-Lemma (Theorem 6.3.2) und andere Folgerungen ab, die uns später für die Berechnung von Kohomologiegruppen auf Riemannschen Flächen nützlich sein werden.

6.1 Differentialformen auf \mathbf{C}

Notation 6.1.1. In diesem Kapitel ist $U \subset \mathbf{C}$ eine offene Teilmenge und $a \in U$ ein Punkt.

Definition 6.1.2. Sei $\mathcal{E}(U)$ die \mathbf{C} -Algebra der *glatten*, d.h. unendlich oft *reell* differenzierbaren Funktionen $U \rightarrow \mathbf{C}$, d.h. alle Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \dots$$

sollen existieren.

Wir schreiben $\frac{\partial}{\partial x}$ für die Abbildung $\mathcal{E}(U) \ni f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$ und analog mit $\frac{\partial}{\partial y}$. Wir setzen außerdem

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Lemma 6.1.3. Sei \mathcal{E}_a der Halm von glatten Funktionen um a (Definition 5.2.1). Sei $\mathfrak{m}_a = \ker(\mathcal{E}_a \rightarrow \mathbf{C}, [f] \mapsto f(a))$ das Ideal bestehend aus (Keimen von) Funktionen, die in a verschwinden. Schreibe \mathfrak{m}_a^2 für das Ideal welches von den Elementen $fg, f, g \in \mathfrak{m}_a$, erzeugt wird.

Dann gilt

$$\mathfrak{m}_a^2 = \{f \in \mathfrak{m}_a, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0\}.$$

Die Abbildung

$$\mathfrak{m}_a \rightarrow \mathbf{C}^2, f \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

induziert einen Isomorphismus (von \mathbf{C} -Vektorräumen)

$$T_a^{(1)} := \mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2 \rightarrow \mathbf{C}^2. \quad (6.1.4)$$

Dieser Vektorraum heißt komplexer Kotangententialraum von X in a .

Beweis. Für $f, g \in \mathfrak{m}$ ist $\frac{\partial fg}{\partial x} = f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Umgekehrt sei o.E. $a = 0 \in U$. In der folgenden Notation verwenden wir die Notation $f(x, y) := f(x + iy)$ etc. Sei $f \in \mathfrak{m}$, d.h. $f(0, 0) = 0$. Es gilt

$$f(x, y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx, ty) dt = x \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(tx, ty) dt}_{=: g_1(x, y)} + y \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(tx, ty) dt}_{=: g_2(x, y)}.$$

Es gilt $g_1(0, 0) = g_2(0, 0) = 0$, d.h. $g_i \in \mathfrak{m}$, also $f \in \mathfrak{m}^2$.

Für (6.1.4) fehlt nur noch die Surjektivität der Abbildung. Diese ist klar wegen $x \mapsto (1, 0), y \mapsto (0, 1)$. \square

Definition 6.1.5. Für $f \in \mathcal{E}(U)$ schreiben wir $d_a f := (f - f(a)) \bmod \mathfrak{m}_a^2$. Wir erhalten aus (6.1.4) eine Zerlegung

$$\begin{aligned} T_a^{(1)} &= \mathbf{C}d_a x \oplus \mathbf{C}d_a y \\ &= \mathbf{C}d_a z \oplus \mathbf{C}d_a \bar{z} =: T_a^{1,0} \oplus T_a^{0,1} \end{aligned}$$

in den sog. *holomorphen Kotangententialraum* und den *antiholomorphen Kotangententialraum*. Entsprechend dieser Zerlegung schreiben wir

$$d_a f = d'_a f + d''_a f$$

mit eindeutigen $d'_a f \in T_a^{1,0}, d''_a f \in T_a^{0,1}$.

Definition 6.1.6. Sei V ein \mathbf{C} -Vektorraum (wir werden $V = T_a^{(1)}$ verwenden) und $n \in \mathbf{N}$. Die n -te äußere Potenz ist definiert als

$$\bigwedge^n V := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ Faktoren}} / (v_1 \otimes \dots \otimes v_i \dots \otimes v_j \dots \otimes v_n + v_1 \otimes \dots \otimes v_j \dots \otimes v_i \dots \otimes v_n).$$

(Rechts ist der i -te und der j -te Eintrag vertauscht, für beliebige $1 \leq i, j \leq n$.) Das Bild von $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ in $\bigwedge^n V$ wird mit $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ bezeichnet. In $\bigwedge^n V$ gilt also nach Definition $v_1 \wedge \dots \wedge v_n = -v_1 \wedge \dots \wedge v_j \dots \wedge v_i \dots \wedge v_n$ (rechts ist der i -te und j -te Eintrag vertauscht).

Bemerkung 6.1.7. Ist e_1, \dots, e_n eine Basis von V , dann bilden die Vektoren $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ eine Basis von $\bigwedge^k V$. Insbesondere gilt $\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k}$, d.h. $\bigwedge^k V = 0$ für $k > n = \dim V$.

Insbesondere

(i) $\bigwedge^0 V = \mathbf{C}$ (für jedes V)

(ii) $\bigwedge^1 V = V$ (für jedes V).

(iii) Für $\dim V = n < \infty$ gibt es den sog. *Determinanten-Isomorphismus*, vgl. Übungsaufgabe 6.5.1

$$\det : \bigwedge^n V \rightarrow \mathbf{C}.$$

Beispiel 6.1.8. Sei $V = T_a^{(1)}$. Die Basis $d_a z$ und $d_a \bar{z}$ liefert eine Basis

$$d_a z \wedge d_a \bar{z} \in T_a^{(2)} := \bigwedge^2 T_a^{(1)}.$$

(Alle höheren $\bigwedge^k T_a^{(1)}$ sind 0.)

Definition 6.1.9. Eine *Differentialform* k -ter Ordnung ($k \geq 0$) oder auch kurz k -Form auf U ist eine Abbildung (von Mengen)

$$\omega : U \rightarrow \bigsqcup_{a \in U} T_a^{(k)}$$

die jedes $a \in U$ auf ein Element von $T_a^{(k)}$ abbildet. (Eine 0-Form ist also eine Funktion $U \rightarrow \mathbf{C}$.)

Eine 1-Form heißt *holomorph* wenn gilt:

$$\omega = f dz \text{ mit } f \in \mathcal{O}(U).$$

Sie heißt *glatt*, wenn

$$\omega = f dz + g d\bar{z} \text{ mit } f, g \in \mathcal{E}(U).$$

(Hierzu äquivalent: $\omega = r dx + s dy$ mit $r, s \in \mathcal{E}(U)$.)

Eine 2-Form heißt *glatt*, wenn

$$\omega = f dz \wedge d\bar{z} \text{ mit } f \in \mathcal{E}(U),$$

d.h. $\omega(a) = f(a) d_a z \wedge d_a \bar{z}$ für $a \in U$.

Wir bezeichnen die holomorphen 1-Formen mit $\Omega(U)$, die glatten k -Formen mit $\mathcal{E}^k(U)$ (und $\mathcal{E}^0(U) := \mathcal{E}(U)$).

Definition 6.1.10. Die *äußere Ableitung*

$$d : \mathcal{E}^k(U) \rightarrow \mathcal{E}^{k+1}(U)$$

ist definiert durch

$$\begin{cases} f \mapsto \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} & k = 0, \\ f dz + g d\bar{z} \mapsto \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} & k = 1, \\ f dz \wedge d\bar{z} \mapsto 0 & k = 2. \end{cases}$$

Für eine glatte Funktion f sind die zweiten partiellen Ableitungen vertauschbar, daher gilt

$$d(d(f)) = d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right) = \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}\right) dz \wedge d\bar{z} = 0,$$

d.h. $d \circ d = 0$.

Wir erhalten also einen Komplex, den sog. *de-Rham-Komplex*

$$\mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2.$$

Bemerkung 6.1.11. Wenn $d(\alpha) = 0$ gilt, nennt man $\alpha \in \mathcal{E}^k(X)$ *geschlossen*. Wenn $\alpha = d(\beta)$ mit $\beta \in \mathcal{E}^{k-1}(X)$ gilt, nennt man α *exakt*. Wegen $d \circ d = 0$ ist jede exakte Form geschlossen ist (für beliebiges X). Satz 6.1.13 besagt, dass für $U = U_R(0)$ auch die Umkehrung gilt. Für allgemeines X gilt die Umkehrung nicht.

Eines unserer Hauptziele in diesem Abschnitt ist das folgende Theorem:

Theorem 6.1.12. Die folgende Sequenz von Garben auf $U \subset \mathbf{C}$ ist exakt:

$$0 \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \rightarrow 0.$$

Erster Teil des Beweises: Die Exaktheit an der Stelle \mathcal{E}^0 ist äquivalent (Satz 5.2.5) zu: für $f \in \mathcal{E}^0(U)$ mit $df = 0$ ist f auf jeder Zusammenhangskomponente von U konstant: in der Tat,

$$0 = d(f) = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \stackrel{\text{Übungsaufgabe 6.5.4}}{=} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

impliziert $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ da dx und dy eine Basis von $T_a^{(1)}$ bilden. Also ist f konstant.

Die Exaktheit an der Stelle \mathcal{E}^1 ist eine Konsequenz des folgenden Satzes. □

Satz 6.1.13. Sei $U = U_R(0)$, $0 < R \leq \infty$. Sei $\alpha \in \mathcal{E}^1(U)$, $d(\alpha) = 0$. Dann gibt es $\beta \in \mathcal{E}(U)$ mit $d\beta = \alpha$.

Beweis. Sei $\alpha = f dx + g dy$. Wir werden eine explizite Stammfunktion konstruieren:

$$\beta(x, y) := \int_0^1 f(tx, ty)x + g(tx, ty)y dt, (x, y) \in U.$$

In der Tat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial x} & \stackrel{*}{=} \int_0^1 \left(t \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + t \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(tx, ty)}_{=\frac{\partial f}{\partial y}} y + f(tx, ty) \right) dt \\ & = \int_0^1 \left(t \frac{d}{dt} f(tx, ty) + f(tx, ty) \right) dt \\ & = \int_0^1 \frac{d}{dt} (tf(tx, ty)) dt \\ & = f(x, y). \end{aligned}$$

Bei * wurde Differentiation und Integration vertauscht, dies ist erlaubt, da der Integrand für alle t in Abhängigkeit von x unendlich oft (insbesondere einmal stetig) differenzierbar ist. Wir haben am Schluss den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet. \square

Für die Exaktheit an der Stelle \mathcal{E}^2 benötigen wir stärkere Hilfsmittel, mit denen wir nun beginnen.

6.2 Integration von Differentialformen und der Satz von Stokes

Definition 6.2.1. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ eine C^1 -Kurve und $\alpha = f dx + g dy$ eine glatte 1-Form. Wir schreiben $\gamma(t) = (\gamma_x(t), \gamma_y(t))$ für den Real- und Imaginärteil. Das *Wegintegral* ist definiert als

$$\int_{\gamma} \alpha := \int_0^1 f(\gamma(t)) \frac{d\gamma_x(t)}{dt} dt + g(\gamma(t)) \frac{d\gamma_y(t)}{dt} dt.$$

Das Wegintegral $\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$, welches wir in Definition 2.1.5 definiert hatten, ist offensichtlich ein Spezialfall hiervon. Wie in Lemma 2.1.10 erhalten wir als unmittelbare Umformulierung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung:

Lemma 6.2.2. Sei $F \in \mathcal{E}(U)$ und $\alpha = dF \in \mathcal{E}^1(U)$ ihre äußere Ableitung. (Man nennt F dann auch Stammfunktion der 1-Form α .) Dann gilt

$$\int_{\gamma} dF = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

Eine analoge Aussage gilt auch für Formen höheren Grades. Wir beweisen nur folgenden Spezialfall. Für eine glatte 2-Form $\omega = f dx \wedge dy$, mit $f \in \mathcal{E}(U)$ derart, dass f außerhalb einer kompakten Teilmenge $K \subset U$ verschwindet, setzen wir

$$\int_U \omega := \int_K f(x, y) dx dy.$$

Satz 6.2.3. (Satz von Stokes für 2-Formen (Spezialfall)) Sei $0 \leq r < R < \infty$ und $A := \{z \in \mathbf{C}, r \leq |z| \leq R\}$ ein Kreisring mit Radien r und R . Sei $\omega \in \mathcal{E}^1(U)$ eine 1-Form auf $U \supset A$ (wie immer U offen in \mathbf{C}). Dann gilt

$$\int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega.$$

Hierbei ist auf der linken Seite $\partial A = \{|z| = R\} \sqcup \{|z| = r\}$, wobei das Wegintegral auf dem ersten Teil gegen den Uhrzeigersinn, auf dem zweiten Teil im Uhrzeigersinn gemeint ist.

Beweis. Sei $\omega = f dx + g dy$. Nach Definition von $d\omega$ müssen wir zeigen

$$\int_{r \leq |z| \leq R} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{|z|=R} f dx + g dy - \int_{|z|=r} f dx + g dy.$$

(Hierbei ist nun bei beiden Integralen rechts die gewöhnliche Orientierung gemeint.) Es reicht, den Fall $0 < r (< R)$ zu betrachten, dann folgt mit $\lim_{r \rightarrow 0}$ die Behauptung auch für $r = 0$.

Sei vorerst $\omega = g dy$. Wir führen Polarkoordinaten ein und berechnen mittels Übungsaufgabe 6.5.3:

$$\begin{aligned} z &= \rho \exp(i\theta), \\ x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \theta, \\ dx &= d\rho \cos \theta - \rho \sin \theta d\theta, \\ dy &= d\rho \sin \theta + \rho \cos \theta d\theta, \\ dx \wedge dy &= \rho d\rho d\theta. \end{aligned}$$

(die Terme $d\rho \wedge d\rho$ und $d\theta \wedge d\theta$ verschwinden). Schreibe $h(\rho, \theta) := g(\rho \exp(i\theta))$. Dann gilt $d\omega = \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy = \cos \theta \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \theta}$. Also:

$$\begin{aligned} \int_A d\omega &= \int_{r \leq |z| \leq R} \frac{\partial g}{\partial x} dx dy \\ &= \int_{r \leq \rho < R, 0 \leq \theta \leq 2\pi} \left(\cos \theta \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{r \leq \rho < R, 0 \leq \theta \leq 2\pi} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho h) - \frac{\partial}{\partial \theta}(h \sin \theta) \right) d\rho d\theta \quad (h \cos \theta \text{ hebt sich auf}) \\ &\stackrel{*}{=} \int_{\theta} \cos \theta \left(\int_{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho h) \right) d\theta \\ &= \int_{\theta} h(R, \theta) R \cos \theta d\theta - \int_{\theta} h(r, \theta) r \cos \theta d\theta \\ &= \int_{|z|=R} g dy - \int_{|z|=r} g dy. \end{aligned}$$

An der Stelle “*” haben wir verwendet (für festes ρ): $\int_{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(h \sin \theta) d\theta = h \sin \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$.

Der Satz ist für $\omega = g dy$ gezeigt, den Fall $\omega = f dx$ führt man mittels einer Koordinatentransformation $(x, y) \mapsto (y, -x)$, die die Funktionaldeterminante 1 hat, auf den vorigen Fall zurück. \square

6.3 Das Lemma von Dolbeault

Wir haben nach wie vor die Surjektivität (von Garben auf $U \subset \mathbf{C}$) von

$$d: \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2$$

zu zeigen. In der Basis $dz, d\bar{z}$ von $T_a^{(1)}$ bedeutet dies, für $\alpha = f dz d\bar{z}$ ein $g, h \in \mathcal{E}(U)$ zu finden mit

$$d(gdz + hd\bar{z}) = \left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) dz d\bar{z}. \quad (6.3.1)$$

Für spätere Zwecke werden wir sogar folgende schärfere Aussage zeigen, die (6.3.1) impliziert und damit den Beweis von Theorem 6.1.12 abschließt.

Theorem 6.3.2. Sei $0 < R \leq \infty$ und $U := \{z \in \mathbf{C}, |z| < R\}$. Für jedes $f \in \mathcal{E}(U)$ gibt es $g \in \mathcal{E}(U)$ mit

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f. \quad (6.3.3)$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst, wenn f kompakten Träger hat. Definiere

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \frac{f(z + \zeta)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Die Funktion $1/|\zeta|$ ist auf jeder kompakten Teilmenge von \mathbf{C} integrierbar (Übungsaufgabe 6.5.5), damit ist g wohldefiniert. Außerdem ist g stetig nach x (und analog nach y) differenzierbar wegen

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbf{R}} \int_{\mathbf{C}} \frac{f(z + h + \zeta) - f(z + \zeta)}{h} \frac{1}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \int_{\mathbf{C}} \frac{\partial f}{\partial x}(z + \zeta) \frac{1}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

da $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$ (da f kompakten Träger hat, ist diese Konvergenz auf ganz \mathbf{C} gleichmäßig). Die rechte Seite ist stetig in z , d.h. g ist stetig nach x differenzierbar. Induktiv erhalten wir $g \in \mathcal{E}(\mathbf{C})$.

Wir zeigen nun (6.3.3):

$$\begin{aligned}
2\pi i \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} \int_{|\zeta| \geq \epsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z + \zeta) \frac{1}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\
&= \lim_{\epsilon} \int_{|\zeta| \geq \epsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{f(z + \zeta)}{\zeta} \right) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \quad \text{wegen } \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{f(z + \zeta)}{\zeta} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}(f(z + \zeta))}{\zeta} \\
&= - \lim_{\epsilon} \int_{|\zeta| \geq \epsilon} d \left(\frac{f(z + \zeta)}{\zeta} d\zeta \right) \\
&\stackrel{*}{=} \lim_{\epsilon} \int_{|\zeta| = \epsilon} \frac{f(z + \zeta)}{\zeta} d\zeta \\
&= 2\pi i f(z) + \lim_{\epsilon} \int_{|\zeta| = \epsilon} \frac{f(z + \zeta) - f(z)}{\zeta} d\zeta \\
&= 2\pi i f(z).
\end{aligned}$$

Die Gleichung “*” ist der Satz von Stokes (Satz 6.2.3), angewandt auf den Kreisring $\{\epsilon \leq |\zeta| \leq R\}$, wobei R so groß ist, dass $f(z + \zeta) = 0$ für alle $|\zeta| = R$. Die letzte Gleichung gilt, da der Integrand $\frac{f(z + \zeta) - f(z)}{\zeta}$ in Abhängigkeit von ζ beschränkt ist, da f differenzierbar ist.

Wir zeigen nun die Aussage im allgemeinen Fall. Sei hierzu $U_n := \{z \in \mathbf{C}, |z| < R_n\}$, wobei $0 < R_0 < R_1 < \dots < R$ eine monoton wachsende Folge mit $\lim R_n = R$ sei. Wir schreiben $f = \sum f_n$, wobei $f_n \in \mathcal{E}(U)$ kompakten Träger hat, der außerhalb von U_n liegt (d.h. $f_n|_{U_n} = 0$). Wir können nach dem ersten Teil $g_n \in \mathcal{E}(U)$ finden mit $\frac{\partial g_n}{\partial \bar{z}} = f_n$. Auf U_n ist g_n holomorph. Es gibt ein Polynom $P_n \in \mathbf{C}[z]$, nämlich z.B. ein Teil der Taylorreihe von $g_n|_{U_n}$, so dass $\|g_n - P_n\|_{U_n} < 2^{-n}$ ist. ($\|\varphi\|_K := \sup_{z \in K} |\varphi(z)|$). Sei dann

$$g := \sum_n \underbrace{(g_n - P_n)}_{=: F_n}.$$

Die Reihe $\sum F_n$ ist auf U_n gleichmäßig konvergent und für $i > n$ ist $F_i|_{U_n}$ außerdem holomorph. Nach dem Satz von Weierstraß (Folgerung 2.4.1) ist daher auch $\sum_{i > n} F_i$ auf U_n holomorph und es folgt

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\sum_{i > n} F_i \right) = \sum_{i=1}^n f_i + 0 = f.$$

□

6.4 Berechnung einiger Kohomologiegruppen

Wir können nun beginnen, einige einfache Kohomologiegruppen zu berechnen. Obwohl wir letztlich v.a. an Kohomologie von Garben wie \mathcal{O} , \mathcal{M} , die komplex-analytischer Natur sind, interessiert sind, verwenden wir im Zuge der Berechnungen auch Garben von \mathcal{E} -Moduln. Hierzu dient:

Satz 6.4.1. *Sei X eine Riemannsche Fläche. Wir nehmen an, dass die Topologie von X dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, d.h. es gibt eine abzählbare Basis der Topologie. (Man kann zeigen, dass diese Bedingung in Wahrheit überflüssig ist, d.h. für jede Riemannsche Fläche gilt. Dies erfordert jedoch noch mehr analytische Vorarbeiten.)*

Sei $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{(k)}$ oder $\mathcal{E}^{(1,0)}$ oder $\mathcal{E}^{(0,1)}$. Dann gilt

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \text{ für } i \geq 1.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage unter Verwendung folgender Tatsache (diese benutzt, dass die Topologie abzählbar ist):

Lemma 6.4.2. *Für jede offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)$ von X gibt es eine subordinierte Teilung der Eins, d.h. Funktionen $\psi_i \in \mathcal{E}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\text{supp } \psi_i \subset U_i$
2. jeder Punkt $x \in X$ hat eine Umgebung, die nur endlich viele der Mengen $\text{supp } \psi_i$ trifft.
3. $\sum_i \psi_i = 1$.

Wir zeigen die Aussage nur für $i = 1$. Siehe z.B. [Ive86, Theorem IV.2.2] für beliebiges i .

Sei (f_{ij}) , $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ ein Repräsentant einer Kohomologiekategorie in $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Es gilt also auf $U_i \cap U_j \cap U_k$: $f_{ik} - f_{jk} - f_{ij} = 0$. Die Funktion $\psi_j f_{ij}$ lässt sich als glatte Funktion (bzw. glatte Differentialform) durch null auf ganz U_i fortsetzen. (Dies ist die Schlüsselidee!), d.h. $\psi_i f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i)$. Setze $g_i := \sum_j \psi_j f_{ij}$. Wegen der Endlichkeitsbedingung an die ψ_j ist diese Summe lokal endlich, d.h. $g_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Auf $U_i \cap U_j$ gilt nun:

$$g_i - g_j = \sum_k \psi_k f_{ik} - \psi_k f_{jk} \stackrel{(5.3.2)}{=} \sum_k \psi_k f_{ij} = f_{ij}.$$

□

Folgerung 6.4.3. Sei $U = \{|z| < R\} \subset \mathbf{C}$ für $R \leq \infty$. Dann gilt

$$H^i(U, \mathbf{C}) = H^i(U, \mathbf{Z}) = 0 \text{ für } i \geq 1.$$

Beweis. Wir zeigen nur die Aussage für \mathbf{C} -Koeffizienten. Die Aussage für \mathbf{Z} -Koeffizienten kann aus dieser Aussage abgeleitet werden (siehe [For77, Satz 12.7]) oder alternativ auch mit rein topologischen Methoden bewiesen werden.

Ausgehend von der exakten Sequenz (Theorem 6.1.12)

$$0 \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \rightarrow 0.$$

setzen wir $\mathcal{F} := \ker(d : \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2)$ (Übungsaufgabe 5.4.2) und erhalten mittels Folgerung 5.2.6 zwei exakte Garbensequenzen

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die hierzu gehörige lange exakte Kohomologiesequenzen lauten

$$0 \rightarrow \mathbf{C}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow H^1(U, \mathbf{C}) \rightarrow \underbrace{H^1(\mathcal{E}, \mathbf{C})}_{\text{Satz 6.4.1}_0} \rightarrow H^1(U, \mathcal{F}) \rightarrow H^2(U, \mathbf{C}) \rightarrow \underbrace{H^2(\mathcal{E}, \mathbf{C})}_{\text{Satz 6.4.1}_0} \rightarrow \dots$$

Außerdem ist $\mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) = \{\omega \in \mathcal{E}^1(U), d\omega = 0\}$ nach Satz 6.1.13 surjektiv. Hieraus folgt $H^1(U, \mathbf{C}) = 0$ sowie $H^i(U, \mathcal{F}) \cong H^{i+1}(U, \mathbf{C})$ für $i \geq 1$. Mit der langen exakten Kohomologiesequenz zu $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2 \rightarrow 0$ erhält man für $i \geq 3$:

$$H^0(U, \mathcal{E}^1) \rightarrow H^0(U, \mathcal{E}^2) \rightarrow H^1(U, \mathcal{F}) \rightarrow \underbrace{H^1(U, \mathcal{E}^1)}_{=0} \rightarrow \underbrace{H^1(U, \mathcal{E}^2)}_{=0} \rightarrow H^2(U, \mathcal{F}) \rightarrow \underbrace{H^2(U, \mathcal{E}^1)}_{=0}$$

Aus der Surjektivität von $\mathcal{E}^1(U) \rightarrow \mathcal{E}^2(U)$ (Theorem 6.3.2) sowie den obigen Verschwindungsaussagen folgt $H^i(U, \mathcal{F}) = 0$ für $i \geq 1$ und hiermit auch $H^{i+1}(U, \mathbf{C}) = 0$ für $i \geq 1$. □

Bemerkung 6.4.4. Man kann zeigen: die Surjektivität von $\mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ gilt allgemeiner sogar für einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen X anstelle von U .

Folgerung 6.4.5. Sei $U = \{|z| < R\} \subset \mathbf{C}$ für $R \leq \infty$. Dann gilt

$$H^i(U, \mathcal{O}) = 0 \text{ für } i \geq 1.$$

Beweis. Der Beweis ist ähnlich wie eben, mittels der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{(0,1)} \rightarrow 0. \quad (6.4.6)$$

Beachte $\ker d'' = \mathcal{O}$ nach Definition holomorpher Funktionen. Zur Surjektivität von d'' (als Garbenmorphismus): jede Form $\alpha \in \mathcal{E}^{(0,1)}$ ist geschlossen, d.h. $d\alpha = 0$. Nach Satz 6.1.13 ist auf $V = \{|z| < R\}$ jede geschlossene 1-Form exakt, d.h. es gibt $\beta \in \mathcal{E}(U)$, $d\beta = \alpha$. Wegen $d\beta = d'\beta + d''\beta \in \mathcal{E}^{(1,0)} \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}$ folgt $d''\beta = \alpha$.

Die lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U) \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{(0,1)}(U) \rightarrow H^1(U, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(U, \mathcal{E}) = 0$$

liefert dann die Behauptung für $i = 1$. Für $i > 1$ haben wir ebenfalls wegen der langen exakten Sequenz und Satz 6.4.1 Isomorphismen

$$0 = H^{i-1}(U, \mathcal{E}^{(0,1)}) \rightarrow H^i(U, \mathcal{O}).$$

□

6.5 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 6.5.1. Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbf{C} -Vektorraum, $n := \dim V$. Konstruiere einen Isomorphismus, den sog. *Determinanten-Isomorphismus*

$$\det : \bigwedge^n V \rightarrow \mathbf{C}.$$

Übungsaufgabe 6.5.2. Sei $U \subset \mathbf{C}$. Zeige folgende Gleichheit von Elementen von $\mathcal{E}^2(U)$:

$$dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}.$$

Übungsaufgabe 6.5.3. Zeige für zwei glatte Funktionen $f, g \in \mathcal{E}(U)$:

$$d(fg) = fdg + gdf.$$

Übungsaufgabe 6.5.4. Zeige die folgenden alternativen Formeln für die äußere Ableitung von glatten Funktionen bzw. glatten 1-Formen auf $U \subset \mathbf{C}$:

$$d(f) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

$$d(fdx + gdy) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Übungsaufgabe 6.5.5. Sei $K \subset \mathbf{C}$ kompakt. Zeige

$$\int_K \frac{1}{|z|} dx dy < \infty.$$

Übungsaufgabe 6.5.6. Zeige

$$H^1(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}) = 0.$$

Tipp: Die Überdeckung $\mathbf{P}^1 = U_1 \cup U_2$ (Notation wie in Definition und Lemma 3.1.6) erfüllt nach Folgerung 6.4.5 die Voraussetzungen von Lemma 5.3.5(ii).

Kapitel 7

Der Satz von Riemann-Roch

Notation 7.0.1. In diesem Kapitel ist X eine *kompakte* Riemannsche Fläche.

7.1 Divisoren

Definition 7.1.1. Ein *Divisor* ist eine Abbildung

$$D : X \rightarrow \mathbf{Z},$$

die in fast allen Punkten (d.h. allen bis auf endlich viele) verschwindet.

Bemerkung 7.1.2. Wir schreiben einen Divisor auch als formale Linearkombination

$$D = \sum_{x \in X} D(x)x,$$

wobei nur endlich viele Summanden auftreten. Mit der offensichtlichen Summe $D + D'$ zweier Divisoren erhalten wir eine abelsche Gruppe, die mit $\text{Div}(X)$ bezeichnet wird.

Definition 7.1.3. Der *Grad* eines Divisors D ist definiert als

$$\deg D := \sum_{x \in X} D(x).$$

Wir erhalten so einen Gruppenhomomorphismus

$$\deg : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbf{Z}.$$

In Definition 2.5.6 und später allgemeiner für Riemannsche Flächen in Definition 4.0.6 hatten wir für nicht konstante meromorphe Funktion $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ die Ordnung

$$\text{ord}_x(f)$$

definiert. Falls f konstant a ($a \in \mathbf{C}$) ist, definieren wir zusätzlich

$$\text{ord}_x(f) := \begin{cases} \infty & a = 0 \\ 0 & a \neq 0 \end{cases}.$$

Für $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ gilt $\text{ord}_x f = 0$ für fast alle $x \in X$ (andernfalls wäre die Nullstellenmenge unendlich, hätte wegen der Kompaktheit von X einen Häufungspunkt und damit wäre $f = 0$ nach dem Identitätssatz konstant). Man überzeugt sich leicht (vgl. Bemerkung 2.5.7) davon, dass die Abbildung

$$\mathcal{M}(X) \setminus \{0\} \rightarrow \text{Div}(X), f \mapsto (f) := \sum_{x \in X} \text{ord}_x(f)x$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, d.h. $(fg) = (f) + (g)$, $(f^{-1}) = -(f)$.

Definition 7.1.4. Der Quotient

$$\text{Div}(X)/\langle (f), f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\} \rangle$$

heißt *Divisor-Klassengruppe* von X und wird mit $\text{Cl}(X)$ bezeichnet.

Nach Satz 4.0.11 ist für $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ die Anzahl der Nullstellen von f gleich der Anzahl der Polstellen (beide jeweils mit Vielfachheiten gezählt). Also gilt $\deg((f)) = 0$ für $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$, d.h. wir erhalten

$$\deg : \text{Cl}(X) \rightarrow \mathbf{Z}.$$

Bemerkung 7.1.5. Die Bezeichnung Klassengruppe kommt auch in der Zahlentheorie vor, wobei $\mathcal{M}(X) \setminus 0$ durch $F \setminus \{0\}$ ersetzt wird, wobei F ein Zahlkörper ist und $\text{Div}(X)$ durch formale Linearkombinationen der Form

$$\sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{O}_F} D(\mathfrak{p})\mathfrak{p}$$

ersetzt wird. Im Gegensatz zur Zahlentheorie, wo gezeigt wird, dass $\text{Cl}(F)$ eine endliche Gruppe ist, ist $\text{Cl}(X)$ i.A. unendlich. Man kann z.B. für eine elliptische Kurve $E = \mathbf{C}/\Lambda$ zeigen, dass für einen gewählten Punkt $P_0 \in E$ die Abbildung

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \ker \text{Cl}^0(E) := \ker(\deg : \text{Cl}(E) \rightarrow \mathbf{Z}) \\ P &\mapsto [P - P_0] \end{aligned}$$

eine Bijektion ist!

Definition 7.1.6. Sei $D \in \text{Div}(X)$. Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_D(U) &:= \{f \in \mathcal{M}(U), \text{ord}_x f \geq -D(x) \text{ für alle } x \in U\} \\ &= \{f \in \mathcal{M}(U), (f) \geq -D\} \end{aligned}$$

In Worten besteht $\mathcal{O}_D(U)$ aus den meromorphen Funktionen (auf U) so dass gilt:

$$f \text{ hat in } x \begin{cases} \text{eine Polstelle von Ordnung höchstens } D(x) & D(x) \geq 0 \\ \text{eine Nullstelle von Ordnung mindestens } -D(x) & D(x) \leq 0. \end{cases}$$

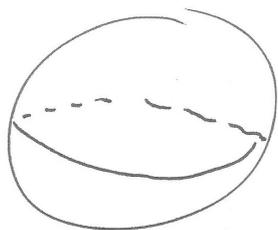
Offenbar bildet \mathcal{O}_D eine Garbe.

Beispiel 7.1.7. Für $D = 0$ ist $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}$.

Definition 7.1.8. Das *Geschlecht* einer kompakten Riemannschen Fläche ist definiert als

$$g := \dim_{\mathbf{C}} H^1(X, \mathcal{O}).$$

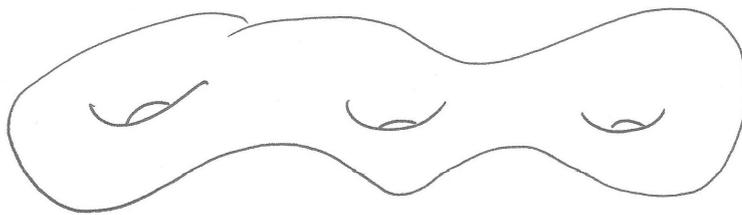
Beispiel 7.1.9. Nach Übungsaufgabe 6.5.6 gilt $g(\mathbf{P}^1) = 0$. Man kann überdies zeigen: das Geschlecht einer kompakten Riemannschen Fläche ist eine rein topologische Invariante, d.h. $g(X) = g(Y)$, wenn X und Y homöomorph sind. Bildlich ist das Geschlecht gegeben durch die "Anzahl der Henkel", z.B. $g(E) = 1$ für eine elliptische Kurve E .



$$g(\mathbf{P}^1) = 0$$



$$g(\mathbf{C}/\Lambda) = 1$$



$$g = 3.$$

7.2 Der Satz von Riemann-Roch und erste Folgerungen

Wir haben nun alle Begrifflichkeiten zur Hand, um den Satz von Riemann-Roch zu formulieren. Es sei daran erinnert, dass X durchweg eine *kompakte* Riemannsche Fläche ist.

Theorem 7.2.1. (Satz von Riemann-Roch) *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und D ein Divisor auf X .*

- (i) *Dann sind $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ und $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ endlich-dimensionale \mathbf{C} -Vektorräume. (Insbesondere ist $g = \dim H^1(X, \mathcal{O})$ endlich).*
- (ii) *Außerdem gilt*

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \deg D + 1 - g.$$

Der Beweis des Satzes zerfällt in zwei Teile: die Behauptung $\dim H^i(X, \mathcal{O}_D) < \infty$ sowie die obige Gleichung. Letztere ist eine recht formale Konsequenz der Garbentheorie, während ersteres auf analytischem Weg, insbesondere unter Verwendung des Satzes von Montel (Satz 2.4.3) gezeigt wird. Bevor wir den Satz beweisen, werden wir einige Folgerungen ziehen.

Folgerung 7.2.2. *Sei X kompakt, $a \in X$ ein Punkt und $g = g(X)$ das Geschlecht. Dann gibt es eine nicht-konstante meromorphe Funktion f auf X , die*

$$-1 \geq \text{ord}_a f \geq -(g+1),$$

erfüllt (d.h. f hat in a einen Pol mindestens erster, und höchstens $(g+1)$ -ter Ordnung) und die an allen anderen Punkten $a' \neq a$ holomorph ist.

Beweis. Wir wenden Theorem 7.2.1 auf den Divisor $D = (g+1)a$ an. Es folgt

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq \deg D + 1 - g = 2.$$

Es gibt also eine nicht-konstante Funktion $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$. Da f nicht konstant ist, wird jeder Wert $s \in \mathbf{P}^1$ (mit Vielfachheiten) gleich oft angenommen, d.h. in a hat f in der Tat einen Pol. \square

Folgerung 7.2.3. *Es gibt eine holomorphe, eigentliche, nicht konstante Abbildung*

$$p : X \rightarrow \mathbf{P}^1,$$

mit $\deg p \leq g+1$. (Hierbei ist $\deg p$ gemäß Satz 4.0.11 die Anzahl der Urbildpunkte $f^{-1}(s)$ für beliebiges $s \in \mathbf{P}^1$, mit Vielfachheiten gezählt).

Beweis. Die Abbildung $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ aus Folgerung 7.2.2 nimmt den Wert ∞ mit Vielfachheit $\leq g+1$ an. \square

Folgerung 7.2.4. *Jede kompakte Riemannsche Fläche X mit $g(X) = 0$ ist biholomorph zu \mathbf{P}^1 .*

Beweis. Eine einblättrige (=injektive) holomorphe Abbildung ist nach Theorem 3.1.9(v) biholomorph. \square

Als weitere Folgerung erhalten wir den Riemannschen Existenzsatz (für kompakte Riemannsche Flächen). Hiermit ist auch der Beweis des Hauptsatzes der Überlagerungstheorie (Theorem 4.0.1, für Y kompakt) abgeschlossen.

Folgerung 7.2.5. (Riemannscher Existenzsatz für kompakte Riemannsche Flächen X) *Seien $a_1, \dots, a_n \in X$ paarweise verschiedene Punkte und $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{C}$ beliebig. Dann gibt es eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $f(a_i) = c_i$.*

Beweis. Aus Folgerung 7.2.2 erhalten wir meromorphe Funktionen $f_i \in \mathcal{M}(X)$, die in a_i einen Pol haben und überall sonst holomorph sind. Setze

$$g_{ij} := \frac{f_i - f_i(a_j)}{f_i - f_i(a_j) + 1} \in \mathcal{M}(X).$$

Es gilt $g_{ij}(a_j) = 0$ und $g_{ij}(a_i) = 1$. Die Funktion

$$f := \sum_{i=1}^n \left(c_i \prod_{j \neq i} g_{ij} \right) \in \mathcal{M}(X)$$

erfüllt dann die Behauptung. \square

7.3 Beweis des Satzes von Riemann-Roch

Wir beginnen nun mit dem Beweis des Satzes von Riemann-Roch. Wir stellen die Behauptung, dass alle auftretenden Vektorräume endlich-dimensional sind, zunächst zurück und beginnen mit einigen Betrachtungen über das Verhalten von \mathcal{O}_D , wenn D variiert.

Definition 7.3.1. Wir schreiben $D \leq D'$ wenn $D(x) \leq D'(x)$ für alle $x \in X$ gilt. In diesem Fall erhalten wir eine offensichtliche Inklusion

$$\mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D'},$$

(d.h. $\mathcal{O}_D(U) \subset \mathcal{O}_{D'}(U)$ für alle $U \subset X$ offen).

Lemma 7.3.2. Sei $D \leq D'$ und sei $S \subset X$ die (endliche) Teilmenge der Punkte $\{x \in X, D(x) < D'(x)\}$. Sei $i_x : \{x\} \rightarrow X$ die Inklusion. Dann gibt es eine exakte Sequenz von Garben

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D'} \xrightarrow{\varphi} F_{D,D'} := \bigoplus_{x \in S} (i_x)_* \mathbf{C}^{\oplus(D'(x)-D(x))} \rightarrow 0. \quad (7.3.3)$$

Beweis. Nach Definition von \mathcal{O}_D besteht der Halm $\mathcal{O}_{D,x}$ aus meromorphen Funktionskeimen f in x , deren Laurent-Reihe von der Form

$$f = \sum_{\nu=-D(x)}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$$

ist. Hieraus folgt eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{D,x} \rightarrow \mathcal{O}_{D',x} \xrightarrow{\varphi_x} \bigoplus_{D'(x)-D(x)} \mathbf{C} \rightarrow 0,$$

wobei $\varphi_x([f]) = (a_{\nu})_{\nu=-D'(x)}^{-D(x)-1}$. Der Halm in $y \in X$ von $F_{D,D'}$ ist nach Übungsaufgabe 5.4.3 gerade 0 für $y \notin S$ sowie $\mathbf{C}^{\oplus(D'(y)-D(y))}$ für $y \in S$. Wenn wir also für $f \in \mathcal{O}_{D'}(U)$ definieren: $\varphi(f) = (\varphi_x(f))$, dann ist die obige Sequenz (nach Definition von exakten Garbensequenzen) exakt. \square

Die Garben $F_{D,D'}$ messen also den Unterschied zwischen \mathcal{O}_D und $\mathcal{O}_{D'}$. Ihre Kohomologie ist leicht zu berechnen:

Lemma 7.3.4. Für zwei Divisoren $D \leq D'$ gilt

$$\dim_{\mathbf{C}} H^i(X, F_{D,D'}) = \begin{cases} \deg D' - \deg D & i = 0, \\ 0 & i > 0. \end{cases}$$

Beweis. Für $i = 0$ folgt die Aussage unmittelbar aus der Definition. Um die höheren Kohomologien zu bestimmen, sei eine Überdeckung von X gegeben. Sie besitzt, da S (def. wie oben) diskret ist, eine Verfeinerung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ so dass in jedem U_i höchstens ein Punkt aus S enthalten ist. Es genügt, $H^i(\mathfrak{U}, F_{D,D'}) = 0$ zu zeigen. Wir wählen eine Wohlordnung " \leq " auf I und betrachten dann den Komplex $\overline{C}^*(\mathfrak{U}, F)$ (Lemma 5.3.3), dessen Terme definiert sind durch

$$\overline{C}^n(\mathfrak{U}, F) := \prod_{i_0 < i_1 < \dots < i_n} F(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}).$$

Für $F = F_{D,D'}$ diese Gruppe für $n \geq 1$ aber 0, denn in $U_i \cap U_j$ (für $i < j$) ist kein Punkt aus S enthalten, also ist $F_{D,D'}(U_i \cap U_j) = 0$. Damit verschwindet auch die Kohomologie des Komplexes $H^n(\overline{C}^*(\mathfrak{U}, F)) \cong H^n(\mathfrak{U}, F)$. \square

Beweis von Theorem 7.2.1(ii) unter Annahme von Theorem 7.2.1(i). (a) Für $D = 0$ gilt $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}$ und $\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathcal{O}) = \blacksquare$

1, denn auf einer kompakten Riemannschen Fläche sind die einzigen holomorphen Funktionen nach Liouville (Theorem 3.1.9(vii)) konstant. Außerdem ist $g := \dim H^1(X, \mathcal{O})$, d.h. die Formel gilt (quasi nach Definition von g).

(b) Seien $D \leq D'$ zwei beliebige Divisoren. Wir zeigen, dass die Formel für D gilt genau dann, wenn sie für D' gilt. Wir verwenden hierzu die lange exakte Kohomologiesequenz die aus (7.3.3) resultiert (alle $H^i(-) := H^i(X, -)$)

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_D) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{D'}) \rightarrow H^0(F_{D,D'}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{D'}) \rightarrow H^1(F_{D,D'}) \stackrel{\text{Lemma 7.3.4}}{=} 0.$$

Setzen wir $V := \text{im} H^0(\mathcal{O}_{D'}) \rightarrow H^0(F_{D,D'})$ so spaltet sich diese exakte Sequenz auf in zwei kurze exakte Sequenzen, nämlich

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_D) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{D'}) \rightarrow V \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \underbrace{H^0(F_{D,D'})}_{\dim = \deg D' - \deg D} / V \rightarrow H^1(\mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{D'}) \rightarrow 0. \quad (7.3.5)$$

Jede exakte Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ von \mathbf{C} -Vektorräumen spaltet, insbesondere gilt $\dim B = \dim A + \dim C$. Wenden wir dies auf die obigen Sequenzen an, erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim H^0(\mathcal{O}_D) - \dim H^1(\mathcal{O}_D) &= (\dim H^0(\mathcal{O}_{D'}) - \dim V) - (\dim H^0(F_{D,D'}) - \dim V - \dim H^1(\mathcal{O}_{D'})) \\ &= \dim H^0(\mathcal{O}_{D'}) - \dim H^1(\mathcal{O}_{D'}) - \deg D' + \deg D. \end{aligned}$$

Also ist die Zahl $\dim H^0(\mathcal{O}_D) - \dim H^1(\mathcal{O}_D) - \deg D$ von D unabhängig.

- (c) Aus den ersten beiden Schritten folgt die Behauptung für jeden Divisor $D \geq 0$.
- (d) Schließlich, für beliebiges D gibt es einen Divisor $D' \geq 0$ der $D' \geq D$ erfüllt. Also gilt die Behauptung auch für D . □

Im folgenden Beweis wird der Satz von Montel (Satz 2.4.3) und der Satz von Schwartz verwendet. Um letzteren anwenden zu können, sei daran erinnert, dass der \mathbf{C} -Vektorraum $\mathcal{O}(U)$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta versehen ist. D.h. nach Definition konvergiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{O}(U)$ gegen $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ genau dann, wenn für jedes Kompaktum $K \subset U$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - f|_K = 0.$$

Wir wissen aus dem Satz von Weierstraß (Folgerung 2.4.1), dass dann automatisch $f \in \mathcal{O}(U)$ gilt, d.h. f ist holomorph. Mit anderen Worten: die Familie von Normen $\{|\cdot|_K\}_{K \subset U \text{ kompakt}}$ definiert eine Topologie auf $\mathcal{O}(U)$ bezüglich derer $\mathcal{O}(U)$ vollständig ist. Man kann überdies die Menge aller Kompakta durch eine abzählbare Teilmenge ersetzen, ohne die resultierende Topologie zu ändern. Daher ist $\mathcal{O}(U)$ ein Fréchet-Raum im Sinne folgender Definition:

Definition 7.3.6. Ein topologischer \mathbf{C} -Vektorraum V heißt *Fréchet-Raum*, wenn es eine abzählbare Familie von Halbnormen $|\cdot|_i$, $i \in \mathbf{N}$ gibt, bezüglich derer V vollständig ist. (Eine Halbnorm ist eine Abbildung $|\cdot| : V \rightarrow \mathbf{R}^{\geq 0}$ mit $|x+y| \leq |x| + |y|$ und $|\lambda x| = |\lambda||x|$ für $\lambda \in \mathbf{C}$.)

Bemerkung 7.3.7. Zum Vergleich: ein *Banach-Raum* ist ein topologischer \mathbf{C} -Vektorraum, der bezüglich einer (einzelnen) Norm $|\cdot|$ vollständig ist. Jeder Banach-Raum ist also ein Fréchet-Raum, aber nicht umgekehrt: man kann z.B. zeigen, dass $\mathcal{O}(U)$ mit der obigen Topologie kein Banach-Raum ist.

Definition 7.3.8. Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ zwischen zwei topologischen \mathbf{C} -Vektorräumen heißt *kompakt*, wenn es eine Umgebung $A \ni 0$ gibt, so dass $f(A)$ relativ kompakt ist, d.h. $\overline{f(A)}$ kompakt in W ist.

Bemerkung 7.3.9. Eine kompakte Abbildung ist beschränkt und damit stetig.

Es ist bekannt (wird aber im folgenden nicht benötigt): für einen Banachraum V ist $\text{id} : V \rightarrow V$ genau dann kompakt, wenn V endlich-dimensional ist.

Der Satz von Montel, in der Formulierung wie er in Bemerkung 2.4.4 angegeben wurde, liefert uns ein entscheidendes Beispiel für einen kompakten Operator:

Folgerung 7.3.10. Sei U eine offene Teilmenge von \mathbf{C} und $V \Subset U$ eine relativ kompakte Teilmenge (d.h. $\overline{V} \subset U$ kompakt). Dann ist die Restriktionsabbildung

$$r : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V), f \mapsto f|_V$$

ein kompakter Operator.

Beweis. Die Teilmenge

$$A := \{f \in \mathcal{O}(U), \sup_{x \in \overline{V}} |f(x)| < 1\}$$

ist eine Umgebung der 0 in $\mathcal{O}(U)$, denn \overline{V} ist kompakt. Nach Bemerkung 2.4.4 ist $r(A) \in \mathcal{O}(V)$ relativ kompakt genau dann, wenn $r(A)$ bezüglich der Familie der Normen $|\cdot|_K$ ($K \subset V$ kompakt) beschränkt ist. In der Tat: für $f \in A$ und $K \subset V$ kompakt gilt $\overline{K} \subset \overline{V}$ (Abschluss in U) und damit

$$|f|_K < \sup_{x \in \overline{V}} |f(x)| < 1.$$

□

Theorem 7.3.11. (Satz von Schwartz) Seien V, W Fréchet-Räume und $f, g : V \rightarrow W$ stetige lineare Abbildungen. Es sei f surjektiv und g sei kompakt. Dann gilt

$$\dim(F/\text{im}(f + g)) < \infty.$$

Beweis. Siehe [Ser]. □

Beweis von Theorem 7.2.1(i). Aus den exakten Sequenzen (7.3.5) folgt für $D \leq D'$: $H^1(\mathcal{O}_D)$ ist endlich dimensional genau dann, wenn $H^1(\mathcal{O}_{D'})$ es ist und ebenso für H^0 anstelle von H^1 . Mittels der gleichen Argumentation wie im obigen Teil sieht man hieran ($i = 0, 1$):

$$\dim H^i(X, \mathcal{O}) < \infty \Rightarrow \dim H^i(X, \mathcal{O}_D) < \infty \forall D \in \text{Div}(X).$$

Wie oben bereits bemerkt wurde, gilt $\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathcal{O}) = 1$, d.h. die Endlichkeit von $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D)$ für alle D ist bewiesen.

Wir zeigen nun ($g :=$) $\dim H^1(\mathcal{O}) < \infty$. Jeder Punkt $x \in X$ hat eine Koordinatenumgebung (U, z) (d.h. $x \in U$ und eine Karte $z : U \rightarrow V \subset \mathbf{C}$) mit $z_x(x) = 0$ und $z_x(U) = U_2(0)$ (der Ball in \mathbf{C} mit Radius 2). Die offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{x \in X} z_x^{-1}(U_1(0))$$

hat wegen der Kompaktheit von X eine endliche Teilüberdeckung. Wir schreiben $(V_1, z_1), \dots, (V_n, z_n)$ für die zugehörigen Karten. Neben $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i=1}^n$ betrachten wir noch die gröbere Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i = z_i^{-1}(U_2(0))\}$. Dann ist $V_i \Subset U_i$ (\Subset bedeutet "relativ kompakt", d.h. \bar{V}_i ist kompakte Teilmenge von U_i).

Nach Definition (Definition 5.3.1) ist der Čech-Komplex für die Garbe \mathcal{O} definiert als

$$\begin{aligned} C^*(\mathfrak{V}) := C^*(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) &:= \left[C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) \rightarrow \dots \right] \\ &= \left[\bigoplus_i \mathcal{O}(V_i) \xrightarrow{d^0} \bigoplus_{i < j} \mathcal{O}(V_i \cap V_j) \xrightarrow{d^1} \bigoplus_{i < j < k} \mathcal{O}(V_i \cap V_j \cap V_k) \rightarrow \dots \right]. \end{aligned}$$

Hierbei ist $d^0((f_i)) = (f_i - f_j)$ und $d^1((f_{ij})) = (f_{jk} - f_{ik} + f_{ik})$. Sei $Z^1(\mathfrak{V}) := \ker d^1 : C^1(\mathfrak{V}) \rightarrow C^2(\mathfrak{V})$ sowie analog für $Z^1(\mathfrak{U})$. Wir betrachten die Abbildung

$$\psi = (d_{\mathfrak{V}}^0, r) : C^0(\mathfrak{V}) \oplus Z^1(\mathfrak{U}) \rightarrow Z^1(\mathfrak{V}),$$

wobei $r : Z^1(\mathfrak{U}) \rightarrow Z^1(\mathfrak{V})$ die Restriktionsabbildung ist. Wir wenden den Satz von Schwartz auf

$$(d_{\mathfrak{V}}^0, 0) = \psi - r : C^0(\mathfrak{V}) \oplus Z^1(\mathfrak{U}) \rightarrow Z^1(\mathfrak{V})$$

an:

- ψ ist surjektiv, denn r ist surjektiv: verwende hierzu, dass die offenen Teilmengen in beiden Überdeckungen holomorph zu offenen Bällen in \mathbf{C} sind, d.h. nach Folgerung 6.4.5 gilt $H^n(V_i, \mathcal{O}) = 0$ für $n \geq 0$. Nach Lemma 5.3.5 gilt also $H^n(X, \mathcal{O}) = H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) = H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.
- Beide Abbildungen sind stetig (klar nach Definition der Topologien).
- r ist kompakt: dies ist genau die Aussage von Folgerung 7.3.10, wenn wir $Z^1(\mathfrak{V})$ durch $C^1(\mathfrak{V})$ ersetzen. Ersterer ist aber als Kern der stetigen Abbildung d ein abgeschlossener Unterraum, hieraus folgt die Kompaktheit von $r : Z^1(\mathfrak{U}) \rightarrow Z^1(\mathfrak{V})$.

Also ist $H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) = Z^1(\mathfrak{V}) / \text{im} d_{\mathfrak{V}}^0$ endlich-dimensional. □

Bemerkung 7.3.12. Der Beweis zeigt sogar allgemeiner, dass $H^n(X, \mathcal{O}_D)$ endlich-dimensional für $n \geq 0$ und $D \in \text{Div}(X)$ ist. Man kann jedoch zeigen: $H^n(X, \mathcal{O}_D) = 0$ (Übungsaufgabe 7.4.1) für $n \geq 2$, daher verzichten wir auf die hierfür nötigen minimalen Ergänzungen.

7.4 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 7.4.1. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und D ein Divisor auf X . Zeige $H^n(X, \mathcal{O}_D) = 0$ für $n \geq 2$.

Tipp: reduziere zunächst wie im Beweis von Theorem 7.2.1 auf den Fall $D = 0$. Verwende dann die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{(0,1)} \rightarrow 0.$$

Übungsaufgabe 7.4.2. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und D ein Divisor auf X mit $\deg D < 0$. Zeige

$$H^0(X, \mathcal{O}_D) = 0.$$

Tipp: verwende, dass für jede nicht konstante meromorphe Funktion $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ jeder Wert $s \in \mathbf{P}^1$ (mit Vielfachheiten) gleich oft angenommen wird. Was ergibt sich also für $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$?

Kapitel 8

Serre-Dualität

Die fundamentale Riemann-Roch-Gleichung

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \deg D + 1 - g$$

haben wir bisher nur insofern ausgenutzt, als $\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) \geq 0$ ist und sich hieraus die Ungleichung

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq \deg D + 1 - g$$

ergibt. Für präzisere Anwendungen ist es wichtig, den Term $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ genauer zu bestimmen und insbesondere ein Kriterium zu erhalten, wann dieser Korrekturterm verschwindet. Wie wir in Kürze sehen werden, ist dies eine direkte Anwendung von Serre-Dualität (Theorem 8.2.4):

Theorem 8.0.1. (Serre-Dualität für Riemannsche Flächen) Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und D ein Divisor auf X . Dann gibt es eine perfekte Paarung (von endlich-dimensionalen \mathbf{C} -Vektorräumen, $i \in \mathbf{Z}$)

$$H^i(X, \mathcal{O}_D) \times H^{1-i}(X, \Omega_{-D}) \xrightarrow{\cup} H^1(X, \Omega) \xrightarrow{\text{Res}} \mathbf{C}. \quad (8.0.2)$$

Insbesondere ist $\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^1(X, \Omega_{-D})$.

Die Garbe Ω_{-D} , sowie das sog. Cup-Produkt “ \cup ” und die Residuenabbildung Res werden wir in Kürze definieren (Definition 8.1.15, Definition 8.1.19, Definition 8.1.9).

Zur Erinnerung: eine perfekte Paarung von zwei \mathbf{C} -Vektorräumen

$$\varphi : V \times W \rightarrow \mathbf{C}$$

ist eine bilineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass die induzierten Abbildungen

$$V \rightarrow W^* := \text{Hom}(W, \mathbf{C}), v \mapsto (w \mapsto \varphi(v, w))$$

$$W \rightarrow V^* := \text{Hom}(V, \mathbf{C}), w \mapsto (v \mapsto \varphi(v, w))$$

Isomorphismen sind. Falls V und W endlich-dimensional sind (wie im obigen Fall), dann genügt es, eine der beiden Bedingungen zu überprüfen (Übungsaufgabe, benutze hierzu dass die natürliche Abbildung $W \rightarrow W^{**}$ im Fall $\dim W < \infty$ ein Isomorphismus ist). In diesem Fall besagt eine perfekte Paarung insbesondere, dass

$$\dim V = \dim W$$

gilt. In der obigen Situation erhalten wir also

$$\dim H^i(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^{1-i}(X, \Omega_{-D}). \quad (8.0.3)$$

8.1 Differentialformen auf Riemannschen Flächen

Notation 8.1.1. In Section 8.1 sei X eine Riemannsche Fläche. (Kompaktheit wird hier nicht benötigt).

Wir sammeln einige weitere Begriffe über Differentialformen, die wir benötigen, um die Garben Ω_{-D} und die Abbildung res, die in der Serre-Dualität auftauchen, zu definieren.

Für $U \subset X$ offen definieren wir

$$\mathcal{E}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbf{C}, f \text{ ist glatt in einer Karte um jeden Punkt } a \in U\}.$$

Hierbei heißt "glatt in einer Karte": für $a \in U$ und eine Kartenumgebung $a \in U' \xrightarrow{z, \cong} V' \subset \mathbf{C}$ (mit $U' \subset U$) ist die Komposition $z^{-1} \circ f : V' \rightarrow \mathbf{C}$ eine glatte Abbildung im üblichen Sinn. Man überlegt sich sofort, dass dies, genau wie auf $X \subset \mathbf{C}$, eine Garbe definiert. Die Halme \mathcal{E}_a an einem Punkt $a \in X$ sind wiederum Ringe mit (maximalem) Ideal $\mathfrak{m}_a := \ker(\mathcal{E}_a \rightarrow \mathbf{C}, [f] \mapsto f(a))$ und es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_a^2 \rightarrow \mathfrak{m}_a \rightarrow T_a^{(1)} \cong \mathbf{C}^2 \rightarrow 0.$$

Für $f \in \mathcal{E}(U)$ ist wiederum $d_a(f) := (f - f(a)) \bmod \mathfrak{m}_a^2 \in T_a^{(1)}$. Eine k -Form auf $U \subset X$ ist eine Abbildung

$$\omega : U \rightarrow \bigsqcup_a \bigwedge^k T_a^{(1)},$$

die jeden Punkt $a \in U$ auf ein Element in $\bigwedge^k T_a^{(1)}$ abbildet.

Falls z wie oben eine Karte um a ist, ist beispielsweise

$$\begin{aligned} dz : U &\rightarrow \bigsqcup_a T_a^{(1)} \\ a &\mapsto d_a z \end{aligned}$$

eine 1-Form.

Definition 8.1.2. Eine 1-Form ω heißt *holomorph*, wenn sie für jede Karte z (s.o.) von der Form

$$\omega = f dz$$

ist, wobei $f \in \mathcal{O}(U)$. Holomorphe 1-Formen bilden eine Garbe (wie man leicht prüft), die mit Ω bezeichnet wird.

Ebenso sind glatte 1- und 2-Formen analog zu Definition 6.1.9 definiert: sie sind lokal von der Form $f dz + g d\bar{z}$ bzw. $f dz \wedge d\bar{z}$ mit $f, g \in \mathcal{E}(U)$.

8.1.1 Pullback von Differentialformen

Für die Integration von 2-Formen und den Beweis des Satzes von Riemann-Hurwitz benötigen noch den sog. *Pullback* von Differentialformen. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen (nicht notwendig kompakten) Riemannschen Flächen. Wir hatten für eine offene Teilmenge $U \subset Y$ bereits die Abbildungen

$$f^* : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(f^{-1}(U)), \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(f^{-1}(U)), f^*(g) := f \circ g$$

betrachtet. Sei $a \in X$ ein Punkt. Bilden wir $\operatorname{colim}_{f(a) \in U} \mathcal{E}(U)$ (direkter Limes oder filtrierter Kolimes über alle offenen Umgebungen $U \subset Y$ von $f(a)$), erhalten wir

$$f^* : \mathcal{E}_{f(a)} = \operatorname{colim}_{f(a) \in U} \mathcal{E}(U) \rightarrow \operatorname{colim}_{f(a) \in U} \mathcal{E}(f^{-1}(U)) \rightarrow \operatorname{colim}_{a \in V} \mathcal{E}(V) = \mathcal{E}_a.$$

Der rechte Kolimes läuft über alle offenen Umgebungen V von a . Die rechte Abbildung existiert, da die Teilmengen $f^{-1}(U)$ insbesondere auch offene Umgebungen von a sind. Wie bisher bezeichnet $\mathfrak{m}_a := \ker(\mathcal{E}_a \rightarrow \mathbf{C}, [g] \mapsto g(a))$. Dann gilt $f^*(\mathfrak{m}_{f(a)}) \subset \mathfrak{m}_a$ und demzufolge auch $f^*(\mathfrak{m}_{f(a)}^2) \subset \mathfrak{m}_a^2$. Wir erhalten also eine Abbildung auf den Kotangententialräumen

$$f^* : T_{f(a)}^{(1)} \rightarrow T_a^{(1)}$$

und damit auch einen Pullback auf (nicht notwendig glatten) Differentialformen auf U zu denen auf $f^{-1}(U)$. Für glatte Funktionen $g_1, g_2, g_3 : U \rightarrow \mathbf{C}$ gilt

$$\begin{aligned} f^*(g_1 dg_2) &= (f^* g_1) d(f^* g_2), \\ f^*(g_1 dg_2 \wedge dg_3) &= (f^* g_1) d(f^* g_2) \wedge d(f^* g_3), \end{aligned}$$

wie man sofort anhand der Definition von dg_2 nachprüft: $(f^*(dg_2))(a) = f^*(g_2 - g_2(f(a))) = (g_2 \circ f) - g_2(f(a)) = d(g_2 \circ f)(a) = d(f^* g_2)(a)$. Ebenso gilt, wenn f holomorph ist, dass f^* holomorphe bzw. meromorphe Differentialformen bewahrt.

8.1.2 Integration von Differentialformen

Um die Abbildung $\text{res} : H^1(X, \Omega) \rightarrow \mathbf{C}$ zu definieren, benötigen wir einen weiteren Nachtrag zur Integration von 2-Formen.

Sei zunächst $U \subset \mathbf{C}$ offen und $\omega \in \mathcal{E}^2(U)$ eine glatte 2-Form, d.h. $\omega = f dx \wedge dy$. Falls f kompakten Träger hat, dann definiere

$$\int_U \omega := \int_U f(x) dx dy$$

als das gewöhnliche (z.B. Lebesgue-)Integral.

Lemma 8.1.3. Falls $\varphi : V \rightarrow U$ biholomorph ist, so gilt

$$\int_U \omega = \int_V \varphi^* \omega.$$

Beweis. Sei $\varphi = u + iv$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil sowie $\omega = f dx \wedge dy$. Die Transformationsformel der Analysis 2 besagt:

$$\int_U f dx dy = \int_V (\varphi^* f) \cdot |\det D\varphi| dx dy.$$

Hierbei ist $D\varphi := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ die Jacobi-Matrix. Andererseits ist

$$\varphi^* \omega = (\varphi^* dx) \wedge (\varphi^* dy) = d(x \circ \varphi) \wedge d(y \circ \varphi) = du \wedge dv = \det D\varphi dx \wedge dy. \quad (8.1.4)$$

Die Gleichheit ganz rechts gilt aus folgendem Grund (sei $a = e + if$): für einen Punkt $a \in U$ gilt $u = u(a) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(a)(x - e) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(a)(y - f) +$ Terme höherer Ordnung, wobei "Terme höherer Ordnung" bedeutet: Elemente von \mathfrak{m}_a^2 . Also gilt $du = u - u(a) \bmod \mathfrak{m}_a^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(a)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(a)dy$. Wir berechnen also (vgl. Übungsaufgabe 6.5.1)

$$du \wedge dv = (u_x dx + u_y dy) \wedge (v_x dx + v_y dy) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\det D\varphi > 0$. Dies folgt aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen:

$$D\varphi = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \geq 0.$$

(bzw. genauer gilt sogar " > 0 ", da φ biholomorph ist, d.h. $D\varphi$ ist invertierbar). \square

Bemerkung 8.1.5. Der entscheidende Punkt (und nur hier ging ein, dass φ holomorph und nicht nur glatt war) ist

$$\det D\varphi > 0.$$

D.h. ein biholomorphe Abbildung bewahrt die *Orientierung*. Hieraus folgt, dass Riemannsche Flächen automatisch orientiert sind. Z.B. ist es also unmöglich, auf einem Möbiusband oder einer Kleinschen Flasche (die nicht orientiert sind) eine komplexe Struktur zu definieren.

Wir erweitern diese Definition nun für 2-Formen auf einer Riemannschen Fläche X :

Definition 8.1.6. Sei $\omega \in \mathcal{E}^2(X)$ eine glatte 2-Form mit kompaktem Träger

$$\text{supp } \omega := \overline{\left\{ a \in X, \omega(a) \neq 0 \left(\in \bigwedge^2 T_a^{(1)} \right) \right\}}.$$

Wähle eine offene Überdeckung von X durch Karten $\mathfrak{U} = (U_i, z_i)$. Da $\text{supp } \omega$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung durch U_1, \dots, U_n , die $\text{supp } \omega$ überdecken. Wähle eine subordinierte Teilung der Eins (Lemma 6.4.2) $f_i \in \mathcal{E}(X)$, $i = 1, \dots, n$.

$$\int_X \omega := \sum_{i=1}^n \int_X f_i \omega := \sum_{i=1}^n \int_V (z_i^{-1})^* (f_i \omega).$$

Beachte hierzu, dass $\int_V (z_i^{-1})^* (f_i \omega)$ nach Lemma 8.1.3 wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Karte z_i ist. Man überzeugt sich sofort davon, dass $\int_X \omega$ auch unabhängig von der Wahl der Überdeckung \mathfrak{U} , der Teilüberdeckung sowie der Teilung der Eins ist.

Lemma 8.1.7. Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \Omega \rightarrow \mathcal{E}^{(1,0)} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^2 \rightarrow 0. \quad (8.1.8)$$

Beweis. Dies ist ähnlich wie in (6.4.6): Ω ist der Kern von d'' im Wesentlichen nach Definition. Offenbar ist in der Zerlegung $\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}^{(1,0)} \oplus \mathcal{E}^{(0,1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2$ die Einschränkung von d'' auf den zweiten Summanden gerade 0. D.h. die Surjektivität von d , die wir in Theorem 6.1.12 bewiesen hatten, impliziert die von d'' . \square

Definition 8.1.9. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Wir betrachten die lange exakte Kohomologie-sequenz zu (8.1.8):

$$H^0(X, \mathcal{E}^{(1,0)}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{E}^2) \rightarrow H^1(X, \Omega) \rightarrow H^1(X, \mathcal{E}^{(1,0)}) = 0.$$

Sei

$$\text{res} := \frac{1}{2\pi i} \int_X - : H^0(X, \mathcal{E}^2) \rightarrow \mathbf{C}.$$

(Diese Abbildung faktorisiert eindeutig über die *Residuenabbildung* $\text{res} : H^1(X, \Omega) \rightarrow \mathbf{C}$, denn

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega = \int_{\emptyset} \omega = 0.$$

Die erste Gleichheit ist hierbei der Satz von Stokes, der mittels einer Teilung der Eins auf den Satz von Stokes auf Gebieten der Form $U = U_R(0)$ (Satz 6.2.3) zurückgeführt werden kann.)

8.1.3 Meromorphe Differentialformen

Definition 8.1.10. Sei $U \subset X$ offen, $a \in U$ und ω eine holomorphe 1-Form auf $U \setminus \{a\}$. Dann gilt, lokal um a bezüglich einer Karte z , die a auf 0 abbildet:

$$\omega = f dz, \quad f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\}).$$

Wir sagen, dass ω einen Pol k -ter Ordnung hat und schreiben

$$\text{ord}_a \omega = k,$$

wenn dies für f gilt (d.h. wenn wir f als Laurent-Reihe $f = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu$ darstellen gilt $a_\nu = 0$ für alle $\nu < k$, $a_k \neq 0$). Wir bezeichnen außerdem mit

$$\text{res}_a \omega := a_{-1} (= \text{res}_a f).$$

Lemma 8.1.11. Sowohl die Polordnung als auch das Residuum sind unabhängig von der Wahl der Karte z .

Beweis. Siehe [For77, §9.9] für einen Beweis, basierend auf der Gleichung (8.1.4). Die Idee ist, dass die Kartenwechselabbildung ψ zwischen der Karte z und einer anderen Karte w biholomorph ist und daher keinen Beitrag zu Ordnung und Residuum liefert. \square

Bemerkung 8.1.12. Der strukturelle Hintergrund hinter dem obigen Begriff ist wie folgt: es gibt den Begriff des Tensor-Produkts von Garben, welches die Eigenschaft hat, dass es sich mit der Halmbildung verträgt:

$$(F \otimes_G H)_a = F_a \otimes_{G_a} H_a.$$

Um z.B. die Ordnung im Punkt a zu definieren, benötigen wir eine Abbildung

$$\mathcal{M}^{(1)} \rightarrow i_* \mathbf{Z}$$

wobei $i : \{a\} \rightarrow X$. Äquivalent hierzu ist eine Abbildung

$$\mathcal{M}_a^{(1)} \rightarrow \mathbf{Z}.$$

Diese erhält man ohne Diskussion von Koordinaten usw. mittels

$$\mathcal{M}^{(1)} = \Omega \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \rightarrow i_* \mathbf{Z}$$

da Ω lokal um jeden Punkt a isomorph zu \mathcal{O} ist (Übungsaufgabe 8.3.1). Dann ist \mathcal{M}_a der Quotientenkörper des diskreten Bewertungsrings \mathcal{O}_a (Übungsaufgabe 2.7.14). Für einen beliebigen Erzeuger ϖ des Hauptideals in \mathcal{O}_a gilt daher

$$\mathcal{M}_a^{(1)} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \varpi^n \Omega_a, \quad \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} \varpi^n \Omega_a = 0$$

Hiermit ist $\text{ord}_a \omega$ die kleinste (automatisch wohldefinierte) Zahl, so dass $\omega \in \varpi^n \Omega_a$ liegt.

Definition 8.1.13. Sei $U \subset X$ offen. Eine *meromorphe 1-Form* auf U ist eine holomorphe 1-Form ω , die auf einer offenen Teilmenge $U' \subset U$ definiert ist, so dass gilt:

- $U \setminus U'$ ist diskret,
- ω hat in jedem Punkt in $U \setminus U'$ einen Pol.

Meromorphe 1-Formen bilden (wie man leicht prüft) eine Garbe $\mathcal{M}^{(1)}$.

Notation 8.1.14. Sei X im folgenden stets eine kompakte Riemannsche Fläche und D, D' Divisoren auf X .

Definition 8.1.15. Die Garbe Ω_D ist wie folgt definiert:

$$\Omega_D(U) := \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U), \text{ord}_a \omega \geq -D(a) \forall a \in U\}.$$

Beispiel 8.1.16. Genau wie für $D = 0$ gilt: $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$, gilt auch $\Omega_0 = \Omega$, die Garbe der holomorphen Differentialformen.

Definition 8.1.17. Der Divisor $(\omega) \in \text{Div}(X)$ einer meromorphen 1-Form $\omega \neq 0$ ist definiert als

$$(\omega) := \sum_{a \in X} \text{ord}_a \omega a.$$

(Die Summe ist wie beim Divisor einer meromorphen Funktion endlich.) Ein Divisor, der sich auf diese Weise (für beliebiges $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$) erhalten lässt, heißt *kanonischer Divisor*. Im folgenden sei

$$K$$

stets ein kanonischer Divisor.

Lemma 8.1.18. Sei $0 \neq \omega \in \mathcal{M}^{(1)}$ eine meromorphe 1-Form. (Beispielsweise $\omega = df$ mit $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \mathbf{C}$, diese existiert nach Folgerung 7.2.2.) Für einen beliebigen Divisor D und einen kanonischen Divisor $K = (\omega)$ ist die Abbildung

$$\mathcal{O}_{D+K} \rightarrow \Omega_D, f \mapsto f\omega$$

ein Isomorphismus (von Garben auf X).

Beweis. Es genügt, Wohldefiniertheit der Abbildung, Injektivität und Surjektivität lokal in einer Karte (U, z) zu prüfen, da \mathcal{O}_{D+K} und Ω_D beides Garben sind. Sei $\omega = h dz$ mit $h \in \mathcal{M}(U)$. Dann ist $(\omega) = (h) = K$ (auf U). Für $f \in \mathcal{O}_{D+K}(U)$, d.h. $(f) \geq -D - K$ ist $(\omega f) = (\omega) + (f) \geq -D$, d.h. die Abbildung nimmt Werte in Ω_D an.

Wir definieren eine Umkehrabbildung: jede Form $\alpha \in \Omega_D(U)$ schreibt sich eindeutig als $\alpha = g dz$, $g \in \mathcal{O}_D(U)$, d.h. $(g) \geq -D$. Wir definieren eine Umkehrabbildung mittels

$$g \mapsto g/h \in \mathcal{M}(U).$$

Es gilt $(g/h) = (g) - (h) \geq -D - K$, d.h. $g/h \in \mathcal{O}_{D+K}(U)$. Offenbar ist dies in der Tat eine Umkehrabbildung. \square

Wir können nun die Formulierung der Serre-Dualität vervollständigen.

Definition 8.1.19. Das *Cup-Produkt*

$$\mathrm{H}^0(X, \Omega_{-D}) \times \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow \mathrm{H}^1(X, \Omega)$$

ist die durch

$$\Omega_{-D} \times \mathcal{O}_D \rightarrow \Omega, (\omega, f \mapsto \omega f)$$

induzierte Abbildung. Genauer ist sie wie folgt definiert: für $\omega \in \mathrm{H}^0(X, \Omega_{-D})$ und eine beliebige offene Überdeckung \mathfrak{U} von X betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \omega \cup - : C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D) &\rightarrow C^n(\mathfrak{U}, \Omega) \\ (f_{i_0, \dots, i_n}) &\mapsto (\omega f_{i_0, \dots, i_n}) \end{aligned}$$

Man prüft sofort nach, dass dies ein Komplex-Homomorphismus ist und daher eine Abbildung auf der Kohomologie, also

$$\omega \cup - : \mathrm{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D) \rightarrow \mathrm{H}^n(\mathfrak{U}, \Omega)$$

induziert. Obige Abbildung entsteht nach Bildung von $\text{colim}_{\mathfrak{U}}$.

8.2 Der Satz von Riemann-Hurwitz

Wir illustrieren die Bedeutung von Serre-Dualität mit einigen Anwendungen. Wir beginnen mit einer Umformulierung des Satzes von Riemann-Roch. Wir führen folgende Schreibweise ein:

Definition 8.2.1. Sei D ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche X . Dann ist

$$\begin{aligned}\chi(D) &:= \chi(\mathcal{O}_D) := \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) \\ &= \sum_{i \in \mathbf{Z}} (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{O}_D) \quad (\text{Übungsaufgabe 7.4.2})\end{aligned}$$

die *Euler-Charakteristik* von D (oder von \mathcal{O}_D).

Der Satz von Riemann-Roch besagt dann also gerade:

$$\chi(D) = \deg D + 1 - g.$$

Satz 8.2.2. Für jeden kanonischen Divisor $K = (\omega)$, $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$ gilt

$$\deg K = 2g - 2.$$

Beweis. Dies folgt mittels $\Omega_{-K} \cong \mathcal{O}$ aus Serre-Dualität

$$\begin{aligned}\deg K &= \chi(\mathcal{O}_K) - 1 + g \quad (\text{Theorem 7.2.1}) \\ &= -\chi(\mathcal{O}) - 1 + g \quad (8.0.3) \\ &= 2g - 2.\end{aligned}$$

□

Beispiel 8.2.3. Das Geschlecht einer elliptischen Kurve $E = \mathbf{C}/\Lambda$ (Beispiel 3.1.7) ist 1:

$$g(E) = 1.$$

In der Tat, die 1-Form $\omega = dz$ auf \mathbf{C} induziert eine nicht verschwindende 1-Form (die ebenfalls mit dz bezeichnet wird) auf E , da die Projektion $\mathbf{C} \rightarrow E$ lokal um jeden Punkt $a \in \mathbf{C}$ biholomorph ist. Offenbar hat ω weder Pole noch Nullstellen, d.h.

$$0 = \deg(\omega) = 2g - 2$$

liefert $g = 1$.

Theorem 8.2.4. (*Riemann-Roch via Serre-Dualität*) Sei X kompakte Riemannsche Fläche, K ein kanonischer Divisor auf X und D ein beliebiger Divisor. Dann gilt

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = \deg D + 1 - g.$$

Insbesondere gilt für $\deg D > 2g - 2$:

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = \deg D + 1 - g.$$

Beweis. Nur die letzte Aussage ist neu; sie folgt aus Satz 8.2.2: $\deg(K - D) = 2g - 2 - \deg D < 0$ und Übungsaufgabe 7.4.2: $H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 0$. □

Wir kommen nun zum Satz von Riemann-Hurwitz. Sei $p : X \rightarrow Y$ eine (automatisch eigentliche) holomorphe, nicht konstante Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Zur Erinnerung: die Blätterzahl ist die Anzahl der Urbildpunkte (mit Vielfachheiten gezählt) eines beliebigen Punktes $s \in Y$. Die Verzweigungsordnung eines Punktes $x \in X$ ist definiert als die Zahl k so dass, lokal um x , p biholomorph zur Abbildung $z \mapsto z^k$ ist (siehe Definition 4.0.6). Der Verzweigungsort $\{x \in X, \text{ord}_p x > 1\}$ ist diskret und damit wegen der Kompaktheit von X endlich. Der Verzweigungsindex von p in x ist definiert als

$$b_x(p) := \text{ord}_p x - 1$$

und die *Gesamtverzweigungsordnung* von p ist definiert als

$$b := b(p) := \sum_{x \in X} b_x p.$$

Theorem 8.2.5. (Satz von Riemann-Hurwitz) *Mit diesen Begriffen gilt*

$$g_X - 1 = \frac{b}{2} + n(g_Y - 1).$$

Beweis. Wähle eine meromorphe Differentialform $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(Y) \setminus \{0\}$. Dann ist auch $p^*\omega$ meromorph und $\neq 0$. Sei $x \in X$, $y = p(x)$. Wir können nach Theorem 3.1.9 Koordinaten-Umgebungen (U, z) von x und (U', w) von y wählen mit der Eigenschaft, dass $z(x) = 0$, $w(y) = 0$ sowie

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{z} & V \\ \downarrow p & & \downarrow z \mapsto z^k \\ U' & \xrightarrow{w} & V'. \end{array}$$

Hierbei ist $k = \text{ord}_x p$. Sei $\omega = fdw$ mit $f \in \mathcal{M}(U')$. Dann folgt auf U :

$$p^*\omega = p^*fd(p^*w) = f(z^k)kz^{k-1}dz.$$

Demnach ist

$$\text{ord}_x(p^*\omega) = b_x p + \text{ord}_x p \cdot \text{ord}_y \omega.$$

Bilden wir $\sum_{x \in X}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{deg}(p^*\omega) &= \sum_x \text{ord}_x(p^*\omega) \\ &= \sum_{y \in Y} \sum_{x \in p^{-1}(y)} \text{ord}_x(p^*\omega) \\ &= \sum_{y \in Y} \sum_{x \in p^{-1}(y)} b_x p + \text{ord}_x p \cdot \text{ord}_y \omega \\ &= \sum_{x \in X} b_x p + n \sum_{y \in Y} \text{ord}_y \omega \quad \text{wegen} \quad \sum_{x \in p^{-1}(y)} \text{ord}_x p = n \\ &= b(p) + n \text{deg} \omega \end{aligned}$$

Wegen $\text{deg} \omega = 2g_Y - 2$, $\text{deg}(p^*\omega) = 2g_X - 2$ folgt die Behauptung. □

Beispiel 8.2.6. Sei $E = \mathbb{C}/\Lambda$ eine elliptische Kurve und

$$\wp := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0} \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \in \mathcal{M}(E)$$

die Weierstraß-Funktion zu Λ . Im Beweis von Lemma 2.5.22 hatten wir gesehen, dass \wp in $z = 0$ einen Pol 2. Ordnung hat und ansonsten keine Pole hat. Aufgefasst als Abbildung

$$\wp : E \rightarrow \mathbb{P}^1$$

ist also $n = 2$. Der Satz von Riemann-Hurwitz besagt also $b = 4$.

Um die Verzweigungspunkte explizit zu beschreiben verwenden wir die Überlagerungstheorie. Wir kennen (Satz 3.1.13) den Funktionenkörper von E :

$$\mathcal{M}(E) = \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)[t]/t^2 - 4z^3 - g_2z - g_3$$

wobei $z \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ die Standardcoordinate (korrespondierend zu $\text{id} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$) ist und $g_2 := 60 \sum' \lambda^{-4}$ und $g_3 := 140 \sum' \lambda^{-6}$ gewisse Konstanten (die von Λ abhängen) sind.

Nach Theorem 4.0.1 besteht also ein kommutatives Diagramm mit einem (biholomorphen) Isomorphismus φ :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi, \cong} & X \\ & \searrow \wp & \swarrow p \\ & & Y := \mathbb{P}^1 \end{array}$$

wobei (X, p) die in Satz 4.2.15 konstruierte Riemannsche Fläche ist. Die Abbildung \wp ist in einem Punkt $e \in E$ genau dann verzweigt, wenn p in $\varphi(e)$ verzweigt ist.

Nach Konstruktion von X betrachten wir das Polynom

$$P(t) = t^2 + s \in \mathcal{M}(\mathbf{P}^1)[t],$$

$s := -(4z^3 + g_2z + g_3)$. Die Diskriminante von P ist

$$\Delta := \Delta(P) := R(P, P') = \begin{vmatrix} s & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4s.$$

Wir betrachten die Teilmenge $Y' \subset Y$ wo einerseits s holomorph ist und wo andererseits $\Delta(y)$ nicht verschwindet, d.h. wo $s(y) \neq 0, \infty$. Es gilt also

$$Y' = \mathbf{P}^1 \setminus (\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}),$$

wobei die $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{C}$ die Nullstellen von s sind und $\lambda_0 := \infty$. Die Einschränkung von p auf $X' := p^{-1}(Y')$ ist unverzweigt (und hat wie φ und p den Grad 2). Für jedes $y \in \mathbf{P}^1$ besteht das Urbild $p^{-1}(y)$ also entweder aus 2 Punkten, in denen p jeweils unverzweigt ist, oder aus einem Punkt x , in dem p verzweigt ist mit $\text{ord}_x p = 2$. Für $y \in Y'$ tritt notwendigerweise die erste Variante ein. Wir können also Riemann-Hurwitz wie folgt anwenden:

$$4 = b = \sum_{x \in X} (\text{ord}_x p - 1) = \sum_{x: p(x) \in Y'} (\text{ord}_x p - 1) \leq \sum_{p(x) = \lambda_i} 1 \leq 4$$

(die erste Abschätzung wegen $\text{ord}_x p \leq 2$, zur zweiten beachte dass a priori die 3 Nullstellen auch zusammenfallen könnten, d.h. dass s a priori mehrfache Nullstellen haben könne.) Es gilt also in beiden Fällen Gleichheit, d.h. die 3 Nullstellen von s sind verschieden und φ ist genau in den Punkten e verzweigt, wo

$$\varphi(e) = \infty \text{ bzw. } \varphi(e) = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

gilt.

8.3 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 8.3.1. Sei D ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche (die Kompaktheit ist unwesentlich).

- (i) Zeige dass es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U gibt so dass $\mathcal{O}_D(U) \neq 0$.
- (ii) Zeige dann, dass für $f \in \mathcal{O}_D(U) \setminus \{0\}$ die Abbildung

$$\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}_D(U), g \mapsto gf$$

ein Isomorphismus ist.

Man fasst beide Aussagen zusammen, indem man sagt, dass \mathcal{O}_D ein *Geradenbündel* oder auch *lokal freier \mathcal{O} -Modul* vom Rang 1 ist.

Index

- G -Menge, 47
- k -Form, 71
- n -blättrige Überlagerung, 48
- n -te Wurzel $\sqrt[n]{f}$, 21
- Čech-Kohomologie, 65
- Čech-Komplex, 65

- Abbildung, 8
- abgeschlossen, 43
- analytisch, 7
- analytische Fortsetzung, 35
- antiholomorphen Kotangententialraum, 70

- Banach-Raum, 81
- biholomorph, 22
- biholomorphe Abbildung, 38
- Blätterzahl von p , 48

- Cauchy-Riemann Gleichungen, 33
- Cauchyscher Integralsatz, 16
- Cayley-Abbildung, 34
- Charakter, 58
- Cup-Produkt, 85, 89

- de-Rham-Komplex, 71
- Decktransformationen, 50
- Determinanten-Isomorphismus, 70, 76
- Differentialform, 71
- direkter Limes, 63
- diskreter Bewertungsring, 36
- Diskriminante, 55
- Divisor, 9, 77
- Divisor-Klassengruppe, 77

- eigentlich, 43
- einfach zusammenhängend, 18
- elementarsymmetrische Funktionen, 51
- elementarsymmetrischen Funktionen, 51
- elliptische Funktion, 27
- elliptische Kurve, 8, 38
- erste Homotopiegruppe, 34
- essentiell surjektiv, 59
- Euler-Charakteristik, 90
- exakt, 71
- exakte Sequenz von Garben, 63
- Exponentialfunktion, 13
- Exponentialsequenz, 63

- feiner, 65
- filtrierte Kolimes, 68
- Fréchet-Raum, 81
- Fundamentalgruppe, 34
- Fundamentalgruppoid, 46

- Fundamentalsatz der Algebra, 34
- Fundamentalumgebung, 44
- Funktionskörper, 40
- Funktor, 46

- Garbe, 62
- Gebiet, 13
- geordneten Čech-Komplex, 65
- Geradenbündel, 92
- Gesamtverzweigungsordnung, 90
- Geschlecht, 10, 78
- geschlossen, 71
- Gitter, 27
- glatten, 69
- gleichmäßig beschränkt, 24
- globale Schnittfunktor, 63
- Grad, 9, 44, 77
- Gruppoid, 46

- Halm, 63
- Hauptzweig des Logarithmus, 21
- hebbare Singularität, 24
- Henselscher Ring, 54
- holomorph, 7, 86
- holomorphe Abbildung, 37
- holomorphe Funktion, 38
- holomorphen Kotangententialraum, 70
- homotop, 18
- Homotopie, 18

- Identitätsmorphismus, 46
- Identitätssatz, 21, 39
- Innere, 26
- isolierte Singularität, 24
- Isotropiegruppe, 47

- Jordanscher Kurvensatz, 26

- kanonischer Divisor, 89
- Karte, 7
- Kategorie, 46
- Kettenkomplex, 62
- Kolimes, 63
- kombinatorisches Origami, 59
- kompakt, 81
- komplex differenzierbar, 7
- komplexe Karte, 37
- komplexe Struktur, 37
- komplexer Kotangententialraum, 70
- Komposition, 46
- Komposition von Wegen, 14
- konstante Garbe, 62
- konstante Prägarbe, 62

- kontravarianter Funktor, 61
- kovarianter Funktor, 61
- kritischen Werte, 44
- Lemma von Goursat, 14
- logarithmische Ableitung, 20
- lokal freier \mathcal{O} -Modul, 92
- lokal wegzusammenhängend, 45
- Länge, 14
- Mannigfaltigkeit, 37
- Maximumsprinzip, 23, 40
- Menge mit G -Wirkung, 47
- meromorphe 1-Form, 89
- meromorphe Funktion, 8, 25
- monisch, 55
- Morphismen, 46
- Morphismus von Garben, 62
- Morphismus von Prägarben, 62
- nullhomotop, 18
- Nullstelle, 25
- Nullteiler, 35
- Objekten, 46
- offen, 23
- offene Überdeckung, 64
- Ordnung, 25
- Origami, 59
- parakompakt, 66
- Periodengitter, 27
- Periodenparallelogramm, 27
- Pol, 24
- Polordnung, 24
- projektive Gerade, 8, 38
- Prägarbe, 61
- Pullback, 86
- Punkt im Unendlichen, 38
- Quotiententopologie, 39
- Randabbildungen, 64
- rationalen Funktionen, 41
- Residuenabbildung, 88
- Residuensatz, 26
- Residuum, 25
- Restriktionsabbildungen, 61
- Resultante, 54
- Riemann-Sphäre, 8
- Riemannsche Fläche, 7, 37
- Riemannscher Abbildungssatz, 31
- Riemannscher Existenzsatz, 58, 79
- Riemannscher Hebbarkeitssatz, 25, 39
- Ring der Halme, 35
- Satz von Liouville, 34, 40
- Satz von Montel, 24
- Satz von Morera, 14
- Satz von Riemann-Hurwitz, 91
- Satz von Riemann-Roch, 10, 79
- Satz von Rouché, 27
- Satz von Schwartz, 82
- Satz von Stokes für 2-Formen (Spezialfall), 72
- Satz von Weierstraß, 23
- Sequenz von Garben, 63
- Serre-Dualität, 85
- Stammfunktion, 14, 72
- Stern, 47
- stückweise C^1 -Kurve, 14
- subordinierte Teilung der Eins, 74
- topologische Mannigfaltigkeit, 37
- Torsor, 20
- transitiv, 48
- Umkehrsatz, 22
- universelle Überlagerung, 49, 50
- unverzweigt, 44
- Verzweigungsindex, 44
- Verzweigungspunkte, 9, 44
- voll, 58
- volltreu, 58
- Wegintegral, 72
- wgzusammenhängend, 13
- Weierstraß-Gleichung, 29
- Weierstraßsche \wp -Funktion, 10, 27
- wesentliche Singularität, 24
- Wohlordnung, 65
- zusammenhängend, 34, 47
- Zweig des Logarithmus, 20
- Äquivalenz von Kategorien, 58
- Übergangsabbildung, 7
- Überlagerung, 44
- Überlagerung von Gruppoiden, 47
- äußere Ableitung, 71
- äußere Potenz, 70