Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Jakob Scholbach

28. November 2022

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Definitionen und erste Beispiele

Notation 1.1. Im folgenden sei G stets eine Gruppe und k ein Körper.

Definition 1.2. Eine *Darstellung* von G über k ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\pi : G \to \mathrm{GL}(V),$$

wobei V ein beliebiger k-Vektorraum ist, $\mathrm{GL}(V)$ die Gruppe der k-linearen Automorphismen von V ist. Der Vektorraum V heißt der zugrundeliegende Vektorraum, man nennt $\dim V$ auch *Grad* der Darstellung.

Wenn klar ist, welche Abbildung π gemeint ist, sagt man auch, dass V eine Darstellung von G ist.

Um den Körper k zu betonen spricht man auch von einer k-Darstellung oder für $k = \mathbf{C}$ oder $k = \mathbf{R}$ von einer komplexen bzw. reellen Darstellung.

Bemerkung 1.3. Anders ausgedrückt, besteht eine G-Darstellung auf einem Vektorraum V aus Endomorphismen $\pi(g) : V \to V$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- $\pi(e_G) = \mathrm{id}_V$ (e_G ist das neutrale Element)
- $\pi(g) \circ \pi(h) = \pi(g \cdot h)$ für alle $g, h \in G$.

(Hieraus folgt dann auch $\pi(g^{-1}) = \pi(g)^{-1}$.)

Beispiel 1.4. Für die triviale Gruppe $G = \{1\}$ ist eine G-Darstellung also einfach ein Vektorraum.

Eine Darstellung von $G = \mathbf{Z}$ ist also äquivalent dazu, einen Vektorraum V anzugeben, zusammen mit einem (k-linearen) Isomorphismus $f : V \to V$. (Dieser ist nämlich das Bild der 1 under $\pi : \mathbf{Z} \to \mathrm{GL}(V)$.)

Eine Darstellung von $G = \mathbf{Z}/n$ ist äquivalent dazu, einen Vektorraum V anzugeben, zusammen mit einer linearen Abbildung $f : V \to V$ derart, dass

$$f^n = \mathrm{id}_V$$

gilt. Wir werden in Kürze (Folgerung 2.4 und vollständiger in Folgerung 5.12) sehen, dass Darstellungen *endlicher abelscher* Gruppen verhältnismäßig leicht zu verstehen sind. Ein wesentliches Interesse der Darstellungstheorie liegt daher in nicht-abelschen Gruppen.

Beispiel 1.5. Die Darstellungen vom Grad 1, d.h. $\dim V = 1$ sind gerade die Gruppenhomomorphismen

$$\pi : G \to \mathrm{GL}(k).$$

Da die rechte Gruppe abelsch ist (!), faktorisiert π eindeutig über die *Abelianisierung*

$$G \to G_{\mathrm{ab}} := G/[G,G] \to \mathrm{GL}(k)$$

Hierbei ist $[G,G]$ die *Kommutator-Untergruppe*, also die Untergruppe, die von den Elementen $xyx^{-1}y^{-1}$ mit $x, y \in G$ erzeugt wird.

Definition 1.6. Die *triviale Darstellung* ist gegeben durch $V = k$ (d.h. der Grad ist 1) und den trivialen Gruppenhomomorphismus

$$G \to \mathrm{GL}(k) = k^{\times},$$

der alles auf id_k (bzw. $1 \in k^{\times}$) abbildet. Diese Darstellung wird mit 1_G oder nur mit 1 bezeichnet. (Die Bezeichnung 1 wird klar werden, wenn wir das Tensorprodukt von G-Darstellungen eingeführt haben.)

Beispiel 1.7. Die *symmetrische Gruppe* S_n ist die Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$. Die Gruppe $G = S_3$ wird erzeugt durch die Elemente $x = (12)$, $y = (123)$ mit den Relationen $x^2 = 1$, $y^3 = 1$ und $yx = xy^2$ (Übungsaufgabe 1.32). Eine S_3-Darstellung ist also gleichbedeutend dazu, einen Vektorraum V anzugeben, sowie zwei Isomorphismen

$$\pi(x), \pi(y) : V \to V$$

die gerade den obigen Relationen genügen, d.h. $\pi(x)^2 (= \pi(x) \circ \pi(x)) = \mathrm{id}_V$ usw. Welche Darstellungen gibt es hier? Wir betrachten dies im Fall $k = \mathbf{C}$.

Für $\dim V = 1$ haben wir einerseits die triviale Darstellung (mit $\pi(x) = \pi(y) = \mathrm{id}_k$), sowie die sog. *Signums-Darstellung*, gegeben durch

$$\pi(x) = -\mathrm{id}_k, \pi(y) = \mathrm{id}_k.$$

Dies sind die einzigen Darstellungen von S_3 vom Grad 1.

Für $\dim V = 2$ können wir

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi(y) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

wählen, wobei ω eine 3. Einheitswurzel in $\mathbf{C}$ ist (so dass $\omega^2 = \omega^{-1}$). Man prüft sofort nach, dass dies eine S_3 Darstellung ist. Den tieferen Grund für die Existenz dieser Darstellung werden wir erst später verstehen, als eine sog. *induzierte Darstellung* der Untergruppe A_3 in S_3, siehe Beispiel 7.25.

Wie in anderen Gebieten der Mathematik auch interessiert man sich für Abbildungen zwischen solchen Objekten, die die gegebene Struktur bewahren. Wenn eine G-Darstellung $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ gegeben ist, schreiben wir oft auch $g : V \to V$ für $\pi(g)$.

Definition 1.9. Eine *G-lineare Abbildung* zwischen zwei G-Darstellungen V (d.h. genauer $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ und W (d.h. $\rho : G \to \mathrm{GL}(W)$) ist eine k-lineare Abbildung $f : V \to W$ so dass für alle $g \in G$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir schreiben $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ für die Menge der G-linearen Abbildungen.

Eine G-lineare Abbildung, die bijektiv ist, heißt *G-linearer Isomorphismus*. Falls es zwischen V und W einen G-linearen Isomorphismus gibt, heißen die Darstellungen auch *äquivalent* oder auch *isomorph*.

Wir bezeichnen mit Rep_G oder $\mathrm{Rep}_G(k)$ die Kategorie deren Objekte die G-Darstellungen sind und deren Morphismen die G-linearen Abbildungen.

Bemerkung 1.10. Die Bedingung, dass zwei Darstellungen äquivalent sind, ist stärkere Bedingung als die Bedingung, dass die Vektorräume V und W (ohne Betrachtung der Darstellungsstruktur) isomorph sind, siehe Beispiel 1.7 für ein Beispiel. Dennoch sprechen wir abkürzend oft nur davon, dass V und W isomorph sind und weisen explizit darauf hin, wenn wir von nicht notwendig G-äquivarianten Abbildungen oder Isomorphismen sprechen.

Die Einschränkung zu einem Körper der Charakteristik 0 sorgt dafür, dass 1_{S_3} nicht isomorph zur Signums-Darstellung ist. Der Fall, dass die Charakteristik von k die Gruppenordnung einer *endlichen* Gruppe G teilt, d.h.

$$\mathrm{char} k | \sharp G$$

wird als *modulare Darstellungstheorie* bezeichnet, sie ist wesentlich anspruchsvoller als die "gewöhnliche" Darstellungstheorie, die sich auf den Fall

$$\mathrm{char} k \nmid \sharp G$$

beschränkt. Insbesondere ist hierin der Fall $\mathrm{char} k = 0$ eingeschlossen, der für Anwendungen z.B. in der Physik und Chemie völlig ausreichend ist.

Eine der Hauptfragen der Darstellungstheorie ist:

Frage 1.11. Welche Darstellungen hat eine gegebene Gruppe G?

Der folgende sog. Satz von Maschke gestattet uns, diese Frage zu vereinfachen. Wir benötigen hierzu etwas Terminologie.

Definition 1.12. Eine *Unterdarstellung* $V \subset W$ ist ein Unter-k-Vektorraum derart dass Einschränkung der G-Wirkung auf W gerade die G-Wirkung auf V ist. Äquivalent hierzu ist: für jedes $g \in G$, $v \in V$ ist $g \cdot v$ (die G-Wirkung in W) wieder in V enthalten.

Offenbar hat jede G-Darstellung V zwei Unterdarstellungen, nämlich 0 und V selbst.

Definition 1.13. Eine Darstellung V ist *irreduzibel*, wenn $V \neq 0$ und es außer 0 und V keine weiteren Unterdarstellungen gibt.

Beispiel 1.14. Sei wieder $G = S_3$. Wir betrachten die Darstellung $V = \mathbf{C}^3$, die auf den Standard-Basisvektoren e_1, e_2, e_3 gegeben ist durch

$$\sigma e_i := e_{\sigma(i)},$$

wobei $\sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ eine Permutation in S_3 ist, d.h. σ permutiert die Basisvektoren. Eine Darstellung, wo G durch permutieren der Basisvektoren wirkt, wird auch *Permutationsdarstellung* genannt.

Diese Darstellung hat eine Unterdarstellung, nämlich

$$0 \subsetneq \{\lambda(e_1 + e_2 + e_3), \lambda \in \mathbf{C}\} \subsetneq V.$$

Diese Darstellung ist also nicht irreduzibel.

Beispiel 1.15. Jede 1-dimensionale Darstellung ist irreduzibel. Außerdem ist ie S_3-Darstellung in (1.8) irreduzibel: eine 1-dimensionale Unterdarstellung würde bedeuten, dass es $r = (r_1, r_2) \in \mathbf{C}^2$ gibt, der für die x- und die y-Wirkung ein Eigenvektor ist, d.h. $xr = \lambda_1 r$, $yr = \lambda_2 r$. Ausrechnen liefert $(r_2, r_1) = \lambda_1(r_1, r_2)$ sowie $\omega r_1 = \lambda_2 r_1$, $\omega^2 r_2 = \lambda_2 r_2$. Die einzige Lösung hierfür ist $r = (0, 0)$.

Definition 1.16. Seien V und W zwei G-Darstellungen. Die *direkte Summe* ist definiert als $V \oplus W$ (als zugrundeliegender Vektorraum) zusammen mit der G-Wirkung

$$g \cdot (v, w) := (g \cdot v, g \cdot w).$$

Theorem 1.17. *(*Satz von Maschke*) G sei endlich und es gelte* $\operatorname{char} k \nmid \sharp G$ *(z.B.* $\operatorname{char} k = 0$*, etwa $k = \mathbf{Q}$ oder $k = \mathbf{C}$). Jede endlich-dimensionale G-Darstellung V ist isomorph zu einer Darstellung der Form*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} V_i,$$

wobei die V_i irreduzibel sind.

Definition 1.18. Die Menge der irreduziblen G-Darstellungen bis auf Isomorphie wird mit Irrep_G oder genauer $\mathrm{Irrep}_G(k)$ bezeichnet.

Dieses Theorem führt Frage 1.11 auf folgende Frage zurück:

Frage 1.19. Welche *irreduziblen* Darstellungen hat eine gegebene Gruppe G? Insbesondere: wie viele irreduzible Darstellungen hat G?

Definition 1.20. Die *Konjugation* eines Gruppenelementes x mit einem anderen Element g ist definiert als

$$gxg^{-1}.$$

Man sagt, x und $y \in G$ sind konjugiert (Notation: $x \sim y$), wenn es g gibt mit $y = gxg^{-1}$.

Man überprüft sofort (Übungsaufgabe 1.37), dass die Relation "$x \sim y$" eine Äquivalenzrelation ist und bezeichnet die Äquivalenzklassen als *Konjugationsklassen* von G.

Das folgende Theorem besagt, dass die Wirkung von G auf anderen Objekten (d.h. Vektorräumen) wesentlich durch die innere Struktur (die Konjugationsklassen) bestimmt wird:

Theorem 1.21. *G sei endlich und k sei* algebraisch abgeshlossen *und es gelte* $\operatorname{char} k \nmid \sharp G$ *(z.B. gilt dies für $k = \mathbf{C}$). Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen ist dann gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von G.*

Beispiel 1.22. Die Konjugationsklassen der S_n sind in Bijektion zu den *Partitionen* von n, d.h. den Zerlegungen

$$n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k,$$

wobei $1 \le \lambda_k \le \cdots \le \lambda_1$ ($\lambda_i \in \mathbf{N}$).

Für S_3 erhalten wir die 3 Partitionen $3 = 1 + 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $3 = 3$, d.h. S_3 hat (bis auf Isomorphie) 3 irreduzible Darstellungen. Dies müssen also die obigen sein.

Beispiel 1.23. In einer abelschen Gruppe G ist stets $gxg^{-1} = x$, d.h. $x \sim y$ ist äquivalent zu $x = y$. Also gibt es genau $\sharp G$ viele (einelementige) Konjugationsklassen, also $\sharp G$ viele irreduzible Darstellungen.

Betrachten wir speziell den Fall $G = \mathbf{Z}/n$. Wie eingangs bemerkt wurde, ist eine 1-dimensionale G-Darstellung äquivalent zur Angabe einer n-ten Einheitswurzel $\zeta \in k^\times$. (Für k algebraisch abgeschlossen und mit $p \nmid \operatorname{char} k$) gibt es genau n von diesen. Man überzeugt sich (durch direkte Rechnung oder bequemer mittels Theorem 1.25), dass zwei solche Darstellungen zu ζ_1 und ζ_2 nur dann isomorph sind, wenn $\zeta_1 = \zeta_2$ gilt. Wir erhalten eine vollständige Beschreibung der irreduziblen G-Darstellungen:

$$\operatorname{Irrep}(\mathbf{Z}/n) \cong \{\zeta \in k^\times, \zeta^n = 1\}.$$

Definition 1.24. Die Darstellung $k[G]$ oder auch kG besteht aus dem Vektorraum

$$V := \operatorname{Abb}_{\mathrm{fin}}(G, k)$$

aller Abbildungen $f : G \to k$ mit *endlichem Träger*, d.h. $f(x) = 0$ für fast alle (=alle bis auf endlich viele $x \in G$). Die G-Wirkung ist wie oben definiert, d.h.

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x).$$

(Überprüfe, dass $g \cdot f \in \operatorname{Abb}_{\mathrm{fin}}(G, k)$ und dass dies eine Darstellung definiert!)

Als Vektorraum ist $\operatorname{Abb}_{\mathrm{fin}}(G, k)$ isomorph zu $\bigoplus_{g \in G} k$, d.h. $\dim kG = \sharp G$. Das folgende Theorem zeigt, dass diese Darstellung für endliche Gruppen G von wesentlicher Bedeutung ist:

Theorem 1.25. *G sei endlich, k sei algebraisch abgeschlossen und es gelte* $\operatorname{char} k \nmid \sharp G$ *(z.B. $k = \mathbf{C}$). Dann gibt es einen Isomorphismus (von G-Darstellungen)*

$$k[G] = \bigoplus_{V_i \in \operatorname{Irrep}_G(k)} V_i^{\oplus \dim V_i}.$$

Hierbei durchläuft die direkte Summe alle irreduziblen G-Darstellungen, jede von ihnen taucht $\dim V_i$ *mal (als Summand) auf.*

Insbesondere gibt es (wegen $\dim k[G] = \sharp G$*) nur* endlich viele irreduzible Darstellungen.

Durch Abzählen der Dimensionen erhält man sofort:

Folgerung 1.26. *Unter den obigen Voraussetzungen an G und k gilt*

$$\sharp G = \sum_{V_i \in \operatorname{Irrep}_G(k)} (\dim V_i)^2.$$

Die Bildung irreduzibler Darstellungen geht also nicht ins Uferlose. Außerdem gestattet einem das Korollar gelegentlich, die Suche nach irreduziblen Darstellungen abzubrechen:

Beispiel 1.27. Die triviale Darstellung 1, die Signums-Darstellung sgn sowie die in (1.8) angegebene Darstellung sind (bis auf Isomorphie) die einzigen irreduziblen Darstellungen von S_3 (vorausgesetzt $\operatorname{char} k \nmid 6$). In der Tat

$$\sharp S_3 = 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2,$$

so dass es keine weiteren irreduziblen Darstellungen geben kann.

Eine weitere Frage ist:

Frage 1.28. Gegeben eine Darstellung V. Wie bestimmt man die sog. *Multiplizität* einer irreduziblen Darstellung W in V, d.h. die Anzahl der direkten Summanden vom Typ W, die in der Zerlegung von V in irreduzible Summanden vorkommen?

Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k mit $\operatorname{char} k \nmid \sharp G$ wird diese Frage durch die sog. Charaktertheorie beantwortet.

Definition 1.29. Sei $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine endlich-dimensionale G-Darstellung. Der *Charakter* von π (oder kürzer: der von V) ist die Funktion

$$\chi_\pi : G \to k, g \mapsto \operatorname{tr}(V \xrightarrow{g} V),$$

die Spur des Endomorphismus, der durch g gegeben ist. (Für eine beliebige Basis $v_1, \dots, v_n$ von V mit $g \cdot v_i = \sum_j a_{ij} v_j$ gilt also $\chi_\pi(g) = \sum_i a_{ii}$.)

Der Charakter bestimmt eine Darstellung schon vollständig (daher der Name!) und beantwortet auch die Frage nach den Multiplizitäten:

Theorem 1.30. *Sei k algebraisch abgeschlossen und* chark $\nmid \sharp G$ *(z.B. $k = \mathbf{C}$). Dann sind zwei endlich-dimensionale G-Darstellungen V und W isomorph genau dann, wenn ihre Charaktere gleich sind, d.h.*

$$\chi_V = \chi_W.$$

Wenn überdies W irreduzibel ist, ist die Multiplizität von W in V gegeben durch

$$\frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_W(g^{-1}).$$

1.2 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1.31. Sei $\Delta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \subset \mathbf{R}^3$. Wir lassen S_3 auf $\Delta \subset \mathbf{R}^3$ operieren, indem die x, y, z-Koordinaten permutiert werden. Wir betrachten den 3-dimensionalen Vektorraum V der Funktionen von $\Delta \to \mathbf{C}$. Welche Zerlegung (als direkte Summe, wie in Theorem 1.17) in irreduzible S_3-Darstellungen hat V?

Übungsaufgabe 1.32. Verifiziere die in Beispiel 1.4 angegebene Darstellung von S_3 durch Erzeuger und Relationen.

Zeige, dass die Zuordnung $\sigma \mapsto (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}$ einen Isomorphismus

$$(S_3)_{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\cong} \{\pm 1\} (\cong \mathbf{Z}/2)$$

induziert. Verifiziere hiermit die Beschreibung der 1-dimensionalen Darstellungen von S_3 in Beispiel 1.7.

Verifziere dass die angegebene 2-dimensionale Darstellung in der Tat eine Darstellung ist.

Zeige, dass die triviale Darstellung von S_3 nicht äquivalent zur Signums-Darstellung ist.

Übungsaufgabe 1.33. Zeige, dass die Darstellung in (1.8) äquivalent zur folgenden 2-dimensionalen komplexen Darstellung ist:

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho(y) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgabe 1.34.

- Bestimme die Charaktere der drei irreduziblen Darstellungen von S_3 als Funktionen

$$S_3 \to \mathbf{C}.$$

- Bestimme die Konjugationsklassen in S_3, d.h. die Äquivalenzklassen bezüglich der Relation "$x \in G$ ist zu $y \in G$ konjugiert."
- Formuliere eine Vermutung zu den Werten von Charakteren und Konjugationsklassen.
- Beweise diese Vermutung.

Übungsaufgabe 1.35. Sei G eine Gruppe. Zeige dass die Abelianisierung

$$G_{\mathrm{ab}}$$

in der Tat abelsch ist. Zeige außerdem, dass für jede abelsche Gruppe H jeder Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ eindeutig über G_{ab} faktorisiert, d.h. dass es $f' : G_{\mathrm{ab}} \to H$ gibt, so dass

$$f = f' \circ \pi,$$

wobei $\pi : G \to G_{\mathrm{ab}}$ die kanonische Abbildung ist.

Bestätige die Aussage in Beispiel 1.5.

Übungsaufgabe 1.36. Sei G endlich. Zeige, dass $k[G]$ dann genau eine 1-dimensionale Unterdarstellung hat, nämlich

$$V = k \cdot (1, \dots, 1) \subset k[G].$$

Zeige außerdem, dass $k[G]$ für $\sharp G = \infty$ keine 1-dimensionale Unterdarstellung hat.

Übungsaufgabe 1.37. Zeige, dass die Konjugationsrelation $x \sim y$ (Definition 1.20) eine Äquivalenzrelation ist.

Zeige, dass die Konjugationsklassen in S_n durch Partitionen gegeben sind.

Übungsaufgabe 1.38. Sei $G = \mathbf{Z}/n$. Gib n paarweise nicht isomorphe, eindimensionale komplexe G-Darstellungen an. Welche reellen (d.h. $k = \mathbf{R}$) eindimensionale Darstellungen hat G?

Übungsaufgabe 1.39. Sei $f : V \to W$ eine G-äquivariante Abbildung zwischen zwei G-Darstellungen. Zeige, dass $\ker f$ und $\operatorname{im} f$ Unterdarstellungen von V bzw. W sind.

Kapitel 2

Das Lemma von Schur

Notation 2.1. In diesem Kapitel sei G eine nicht notwendig endliche Gruppe.

Das Lemma von Schur ist eine genauso einfache wie grundlegende Tatsache, die wir im Folgenden nahezu regelmäßig anwenden werden: sie kontrolliert das Verhalten von Abbildungen zwischen irreduziblen Darstellungen auf sehr einschneidende Weise.

Lemma 2.2. *Eine G-äquivariante Abbildung $f : V \to W$ zwischen irreduziblen G-Darstellungen ist entweder 0 oder ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach Übungsaufgabe 1.39 sind $\ker f$ und $\operatorname{im} f$ Unterdarstellungen. Nach Definition von Irreduzibilität ist entweder $\ker f = V$ (d.h. $f = 0$) oder $\ker f = 0$. Im letzteren ist f injektiv. Wiederum wegen Irreduzibilität gilt $\operatorname{im} f = 0$ (d.h. $f = 0$) oder $\operatorname{im} f = W$. Im letzeren Fall ist f bijektiv, also ein Isomorphismus. □

Folgerung 2.3. *(*Lemma von Schur*) Seien V, W zwei irreduzible, endlich-dimensionale G-Darstellungen. Sei außerdem k* algebraisch abgeschlossen *(z.B. $k = \mathbf{C}$). Dann tritt genau eine der beiden Möglichkeiten ein:*

1. *V ist isomorph (als G-Darstellung) zu W und es gilt*
$$\dim_k \operatorname{Hom}_G(V, W) = 1.$$
(Insbesondere gilt $\dim_k \operatorname{Hom}_G(V, V) = 1$, also bestehen die G-äquivarianten Abbildungen $V \to V$ genau aus den skalaren Vielfachen von id_V.)

2. *V ist nicht isomorph zu W und es gilt*
$$\operatorname{Hom}_G(V, W) = 0.$$

Beweis. Wenn V nicht isomorph zu W ist, gibt es nach obigem Lemma keine (von null verschiedene) G-äquivariante Abbildung $f : V \to W$.

Wenn $V \cong W$, können wir o.E. $V = W$ annehmen. Eine G-äquivariante Abbildung $f : V \to V$ hat (da k-algebraisch abgeschlossen ist) einen Eigenwert $\lambda \in k$. Es ist dann $h := f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ eine G-äquivariante Abbildung (!) mit nicht-trivialem Kern. Wiederum nach obigem Lemma gilt dann $h = 0$, d.h. $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$, d.h. die Behauptung. □

Folgerung 2.4. *Sei k wieder algebraisch abgeschlossen und G eine (nicht notwendig endliche)* abelsche *Gruppe. Dann ist jede irreduzible (endlich-dimensionale) G-Darstellung 1-dimensional.*

Beweis. Im Gegensatz zu einer beliebigen Gruppe, wo eine Darstellung $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ ist, nimmt für G abelsch π Werte in $\mathrm{Aut}_G(V) := \{f \in \mathrm{GL}(V), \pi(g)(f(v)) = f(\pi(g)(v)) \forall g \in G\}$ (bzw. kürzer geschrieben als $gf(v) = f(gv)$) an: in der Tat, für jedes $h \in G$ gilt
$$\pi(g)(\pi(h)(v)) = \pi(gh)(v) \overset{G \text{ abelsch}}{=} \pi(hg)(v) = \pi(h)(\pi(g)(v)).$$
Da V irreduzibel ist gilt nach Schurs Lemma jedoch $\mathrm{Aut}_G(V) = \{\lambda \cdot \mathrm{id}_V, \lambda \in k\}$. Damit ist jeder Untervektorraum $W \subset V$ automatisch G-stabil, da G mittels Vielfachen der Identität wirkt, die jeden Unterraum fest lassen. □

Beispiel 2.5. Die Bedingung an k (algebraisch abgeschlossen) ist in Schurs Lemma (und der direkten Folgerung Folgerung 2.4) in der Tat notwendig: sei $G = \mathbf{Z}/3$ und betrachte die $\mathbf{Q}$-Darstellung $V = \mathbf{Q}^2$, die den Erzeuger $1 \in \mathbf{Z}/3$ auf
$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
abbildet. (Man prüft nach, dass $A^3 = \mathrm{id}$ gilt, d.h. dies liefert in der Tat eine G-Darstellung). Andererseits ist V irreduzibel: eine G-Unterdarstellung $0 \subsetneq W \subsetneq V$ müsste 1-dimensional sein, d.h. es gäbe einen Eigenvektor. Die Eigenwerte von A sind jedoch gerade die 3. Einheitswurzeln, diese sind nicht rational. Widerspruch.

2.1 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 2.6. Sei G eine beliebige Gruppe und V eine G-Darstellung. Zeige, dass V irreduzibel ist genau dann, wenn für jedes $v \in V \setminus \{0\}$ gilt: der von $Gv := \{gv, g \in G\}$ erzeugte Unterraum ist ganz V.

Übungsaufgabe 2.7.

1. Sei V eine irreduzible G-Darstellung über einem Körper k. Sei $z \in Z(G)$ (das Zentrum). Zeige mittels Lemma 2.2, dass es $\lambda_z \in k^\times$ gibt mit
$$z \cdot v = \lambda_z \cdot v.$$
Hierbei ist links die durch die Darstellung gegebene Wirkung von z auf v, rechts die gewöhnliche skalare Multiplikation gemeint.

2. Zeige, dass die Zuordnung $z \mapsto \lambda_z$ einen Gruppenhomomorphismus
$$Z(G) \to k^\times$$
definiert. Man nennt ihn den sog. *zentralen Charakter* von V.

Übungsaufgabe 2.8. Sei G endlich. Zeige, dass jede irreduzible G-Darstellung endlich-dimensional ist.

Übungsaufgabe 2.9. Das *Zentrum* einer Gruppe G ist definiert als $Z(G) := \{x \in G | xy = yx \ \forall y \in G\}$.

1. Die *Heisenberg-Gruppe* $H \subset \mathrm{GL}_3(k)$ besteht aus den Matrizen
$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
mit $a, b, c \in k$. Bestätige (z.B. durch explizite Rechnung), dass es sich in der Tat um eine Untergruppe der $\mathrm{GL}_3(k)$ handelt. Bestimme das Zentrum $Z(H)$.

2. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige mit Hilfe des Lemmas von Schur (ohne explizite Rechnung mit Matrizeneinträgen), dass das Zentrum von $\mathrm{GL}_n(k)$ gerade aus den Diagonalmatrizen besteht.

   Tipp: zeige, dass k^n mit der kanonischen $\mathrm{GL}_n(k)$-Wirkung eine irreduzible Darstellung ist (nutze z.B. Übungsaufgabe 2.6). Was hat $Z(\mathrm{GL}_n(k))$ mit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(k)}(k^n, k^n)$ zu tun?

Übungsaufgabe 2.10. Wir betrachten $V = \mathbf{R}^2$ als Darstellung der Gruppe $G = \mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}), A^t = A^{-1}\}$, indem eine Matrix $A \in G$ auf $v \in V$ durch Linksmultiplikation wirkt. Zeige, dass V eine irreduzible G-Darstellung ist (mittels Übungsaufgabe 2.6). Bestimme $\mathrm{End}_G(V)$ und gib somit ein weiteres Gegenbeispiel zu Schurs Lemma an, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist.

Übungsaufgabe 2.11. Sei k nicht notwendig algebraisch abgeschlossen, G eine Gruppe und V eine irreduzible G-Darstellung. Zeige, dass $\mathrm{End}_G(V)$ dann ein *Schiefkörper* ist, d.h. dass jedes Element $f \in \mathrm{End}_G(V) \setminus \{0\}$ invertierbar ist.

Kapitel 3

Halbeinfachheit

Notation 3.1. In diesem Kapitel ist G eine endliche Gruppe und k ein Körper. Außerdem gelte:

$$\mathrm{char} k \nmid \sharp G$$

(oder äquivalenterweise $\sharp G \neq 0$ in k).

In diesem Kapitel geht es um das Konzept der Halbeinfachheit. Dieses ist (evtl. ohne diesen Namen) aus der linearen Algebra bereits bekannt, wo gezeigt wird, dass jeder Untervektorraum $W \subset V$ ein *Komplement* besitzt, d.h. einen anderen Untervektorraum W' mit der Eigenschaft, dass die natürliche Abbildung

$$W \oplus W' \to V, (w, w') \mapsto w + w'$$

ein Isomorphismus ist. Diese Tatsache benutzt ganz wesentlich, dass k ein Körper ist. Z.B. für $\mathbf{Z}$-Moduln ist die Aussage falsch: der Untermodul $2\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$ besitzt kein Komplement.

Die Darstellungstheorie im Fall $\mathrm{char} k \nmid \sharp G$ ähnelt in dieser Hinsicht der linearen Algebra, wie der Satz von Maschke besagt.

Definition 3.2. Die *Invarianten* einer G-Darstellung sind

$$V^G := \{v \in V, gv = v \text{ für alle } g \in G\}.$$

Die *Koinvarianten* sind

$$V_G := V/\{gv - v, g \in G, v \in V\}.$$

Offenbar ist V^G eine Unterdarstellung von V. (Dies gilt für jede Gruppe.) Außerdem ist V^G (bzw. V_G) der größte Unterraum (bzw. der größte Quotientenraum) von V, auf dem G trivial operiert (Übungsaufgabe 3.19).

Lemma 3.3. *Sei V eine G-Darstellung. Dann ist V^G ein direkter Summand (als G-Darstellung) von V.*

Beweis. Wir betrachten die sog. *Norm-Abbildung*

$$N_G : v \mapsto \sum_{g \in G} gv.$$

A priori ist sie eine lineare Abbildung $V \to V$. Ihr Bild liegt jedoch in V^G, außerdem faktorisiert sie über V_G, d.h. wir haben $V_G \xrightarrow{N_G} V^G$. Die Komposition $V^G \xrightarrow{\iota} V \to V_G \xrightarrow{N_G} V^G$ ist gerade die Multiplikation mit $\sharp G$. (ι ist die Inklusion.) Indem wir durch $\sharp G$ teilen, erhalten wir also eine G-äquivariante Abbildung $\pi : V \to V_G \xrightarrow{\frac{1}{\sharp G} N_G} V^G$ mit $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{V^G}$, d.h. V^G ist ein direkter Summand (als G-Darstellung) von V. $\square$

Definition 3.4. Sei V eine G-Darstellung und W eine H-Darstellung. Wir machen

$$\mathrm{Hom}(V, W)$$

zu einer $G \times H$-Darstellung, indem $(g, h) \in G \times H$ auf $f : V \to W$ wie folgt operiert:

$$((g, h) \cdot f)(v) := hf(g^{-1}v).$$

Für $G = H$ ist oft auch die Einschränkung dieser $G \times G$-Wirkung auf $G \cong \{(g, g), g \in G\} \subset G \times G$ wichtig. Wir schreiben ebenfalls $\mathrm{Hom}(V, W)$ für diese G-Darstellung, d.h. der zugrundeliegende Vektorraum ist $\mathrm{Hom}(V, W)$ und $g \in G$ operiert auf f als

$$(g \cdot f)(v) := gf(g^{-1}v). \tag{3.5}$$

Insbesondere wenden wir dies auf die triviale Darstellung $W = 1$ (Beispiel 1.4) an und definieren die *duale Darstellung* oder *kontragrediente Darstellung* als

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, 1).$$

Der Grund für das g^{-1} (anstelle von gv) wird klar, wenn man mittels Bemerkung 1.3 nachprüft, dass es sich hierbei in der Tat um eine Darstellung handelt.

Beispiel 3.6. Seien V, W zwei G-Darstellungen. Dann gilt nach Definition $\mathrm{Hom}(V, W)^G = \mathrm{Hom}_G(V, W)$. (Hierbei wird Hom wie in (3.5) als G-Darstellung aufgefasst.)

Theorem 3.7. *(*Satz von Maschke*) Sei V eine G-Darstellung und $W \subset V$ eine G-Unterdarstellung. Dann gibt es eine weitere G-Unterdarstellung W' mit der Eigenschaft*

$$V = W \oplus W'.$$

Beweis. Wähle eine Basis von W und ergänze sie zu einer Basis von V. Die neu hinzugekommenen Basisvektoren spannen einen Unterraum $Z \subset V$ auf so dass $V = W \oplus Z$ eine Zerlegung als direkte Summe von Vektorräumen (nicht notwendig G-Darstellungen) ist.

Sei $f : V \to W$ die zugehörige Projektionsabbildung. Wir wenden Lemma 3.3 auf die G-Darstellung $\mathrm{Hom}(V, W)$ an. Nach Definition gilt $(\mathrm{Hom}(V, W))^G = \mathrm{Hom}_G(V, W)$. Die Inklusion $\mathrm{Hom}_G(V, W) \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ hat also einen Schnitt π. Wenden wir dies auf $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ an, erhalten wir

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) \ni r := \pi(f) = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} g \circ f \circ g^{-1}.$$

Für $w \in W$ gilt $g^{-1} \cdot w \in W$

$$r(w) = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} g \cdot f(g^{-1} \cdot w) = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} g \cdot g^{-1} w = w.$$

Damit gilt $r|_W = \mathrm{id}$. Also ist r ein G-äquivarianter Schnitt der Inklusion $W \subset V$. Dies liefert uns dies eine Zerlegung als direkte Summe von G-Darstellungen (!)

$$\ker r \oplus W \xrightarrow{\cong} V.$$

□

Folgerung 3.8. *(*Satz von Maschke, 2.*) Jede endlich-dimensionale G-Darstellung V ist isomorph zu einer Darstellung der Form*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} V_i,$$

wobei die V_i irreduzible Unterdarstellungen von V sind.

Beweis. Dies folgt per Induktion nach der Dimension: wenn V nicht irreduzibel ist, gibt es eine G-Unterdarstellung $0 \subsetneq W \subsetneq V$ und $V = W \oplus W'$ mit $\dim W' < \dim V$. □

Die Zerlegung in irreduzible Komponenten ist *nicht* eindeutig: bereits für $G = 1$ ist die Zerlegung eines Vektorraums als direkte Summe eindimensionaler Räume (d.h. die Wahl einer Basis) nicht eindeutig.

Satz 3.9. *(*Isotypische Komponente*) Sei V eine endlich-dimensionale G-Darstellung und sei W eine irreduzible G-Darstellung. Sei $V = \bigoplus V_i$ eine beliebige Zerlegung in irreduzible Darstellungen und bezeichne $V_W := \bigoplus_{i: V_i \cong W} V_i \subset V$. Die Unterdarstellung V_W ist dann unabhängig von der Wahl der Zerlegung in V_i's und wird als die W-isotypische Komponente von V bezeichnet. Dies liefert eine* kanonische *Zerlegung von V als direkte Summe ihrer isotypischen Komponenten*

$$V = \bigoplus_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} V_W.$$

(Kanonisch heißt hier unabhängig von Wahlen. Gemäß Übungsaufgabe 3.21 ist die Zerlegung auch kanonisch in dem Sinn, dass sie funktoriell ist, d.h. mit G-äquivarianten Abbildungen verträglich.)

Beweis. Sei $E \subset V$ die (nicht notwendig direkte) Summe der Unterdarstellungen von V, die zu W isomorph sind. Diese Unterdarstellung ist wohldefiniert (nicht von der Wahl einer Zerlegung in irreduzible abhängig). Für eine Zerlegung wie oben gilt $\bigoplus_{i: V_i \cong W} V_i \subset E$. Wir müssen die umgekehrte Inklusion zeigen. Sei hierzu $F \subset V$ eine Unterdarstellung die isomorph zu W ist. Sei V_i eine irreduzible Komponente, die *nicht* isomorph zu W ist. Die Komposition $F \subset V = \bigoplus_i V_i \to V_i$ ist eine G-äquivariante Abbildung zwischen irreduziblen Darstellungen. Da $F \not\cong V_i$, ist die Abbildung nach Lemma 2.2 0. Demzufolge ist das Bild von $F \subset V$ in $\bigoplus_{i, V_i \cong W} V_i$ enthalten. □

Definition 3.10. Wir schreiben für zwei endlich-dimensionale G-Darstellungen

$$\langle V, W \rangle := \dim_k \mathrm{Hom}_G(V, W).$$

Diese Paarung erfüllt (für $\mathrm{char} k \nmid \sharp G$) folgende Eigenschaften:

1. Additivität: $\langle V, W \oplus U \rangle = \langle V, W \rangle + \langle V, U \rangle$.

2. Symmetrie:
$$\langle V, W \rangle = \langle W, V \rangle \tag{3.11}$$
Nach dem Satz von Maschke (Theorem 1.17) genügt es, dies für irreduzible V, W zu zeigen, dann folgt es aus Lemma 2.2.

Definition 3.12. Der *Darstellungsring* ist

$$R_k(G) := R(G) := \bigoplus_{A \text{ endlich-dimensionale } G-\text{Darstellung über } k \text{ bis auf Isomorphie}} \mathbf{Z} / ([A'] + [A/A'] - [A] \text{ für alle } A' \subset A),$$

wobei eine Relation wie angegeben für jede endlich dimensionale G-Darstellung A und jede beliebige (notwendig endlich-dimensionale) Unterdarstellung $A' \subset A$ besteht.

Bemerkung 3.13.
1. Da (im Fall $\mathrm{char} k \nmid \sharp G$) jede Unterdarstellung $A' \subset A$ nach Theorem 1.17 ein Komplement hat, genügt es, nur die Relationen $[A'] + [A''] - [A' \oplus A'']$ herauszuteilen.

2. Der Name Darstellungs*ring* ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht gerechtfertigt, da $R(G)$ bisher nur eine abelsche Gruppe ist. Wir werden die Ringstruktur einführen, sobald wir das Tensorprodukt von Darstellungen kennen, siehe Satz 4.27.

Satz 3.14. *Es besteht ein Isomorphismus abelscher Gruppen*

$$R_k(G) = \bigoplus_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \mathbf{Z}. \tag{3.15}$$

Beweis. Wir zeigen dies zunächst nur im Fall $\mathrm{char} k \nmid \sharp G$, der übrige Fall wird sich aus dem Satz von Jordan-Hölder ergeben, siehe Satz 6.5.

Für eine Darstellung V und eine irreduzible Darstellung W bezeichne $\mu(W, V) := \dim V_W / \dim W$. (Wegen $V_W = \bigoplus_{endlich} W$ ist dies eine wohldefinierte natürliche Zahl, nämlich genau die Anzahl der irreduziblen Darstellungen in einer beliebigen Zerlegung $V = \bigoplus_i V_i$, die zu W isomorph sind. Wir wissen auch (benötigen aber für diesen Beweis nicht), dass für k algebraisch abgeschlossen, $\mu(W, V) = \langle W, V \rangle$ gilt; dies folgt aus Folgerung 2.3.) Wir definieren eine Abbildung von $\varphi : R(G) \to \bigoplus_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \mathbf{Z}$ als die eindeutige $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung, die

$$[A] \mapsto \sum_{W \in \mathrm{Irrep}} \mu(W, A)[W]$$

erfüllt. Aus der obigen Bemerkung, dass nur die Relationen $[A'] + [A''] - [A' \oplus A'']$ herauszuteilen sind, sowie der offensichtlichen Tatsache

$$\mu(W, A' \oplus A'') = \mu(W, A') + \mu(W, A'')$$

folgt, dass die Abbildung in der Tat über $R(G)$ faktorisiert. Umgekehrt definieren wir eine Abbildung $\psi : \bigoplus_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \mathbf{Z} \to R(G)$ als die eindeutige $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung, die $[W] \mapsto [W]$ erfüllt.

Wegen der Additivität der beiden Abbildungen genügt es, $\varphi(\psi([W])) = W$ und $\psi(\varphi([A])) = [A]$ zu prüfen. Ersteres ist direkt klar nach Definition und $\mu(W, W') = 0$ für $W' \in \mathrm{Irrep}(G)$, $W' \not\cong W$. Für letztere Gleichheit: nach Definition ist $\psi(\varphi([A])) = \sum_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \mu(W, A)[W]$. Andererseits ist $A = \bigoplus_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} W^{\oplus \mu(W, A}$. Nach Definition von $R(G)$ gilt also $[A] = \sum_W \mu(W, A)[A]$, also folgt die Behauptung. □

Folgerung 3.16. *Jedes Element $r \in R(G)$ lässt sich schreiben als*

$$r = [V] - [V'],$$

wobei V und V' gewisse endlich-dimensionale G-Darstellungen sind. Ein Ausdruck dieser Form heißt virtuelle Darstellung. *Es gibt eine eindeutige solche Darstellung derart, dass V und V'* disjunkt *sind, d.h. dass für jede irreduzible G-Darstellung W $V_W = 0$ oder $V'_W = 0$ gilt (d.h. in den Zerlegungen von V und V' in irreduzible Summanden taucht W nur in V oder in V', nicht aber in beiden auf).*

Beweis. Dies folgt aus dem obigen Isomorphismus, wenn wir

$$\begin{aligned}\sum_{W \in \mathrm{Irrep}_G} n_W [W] &= \sum_{n_W > 0} n_W [W] - \sum_{n_W < 0} (-n_W)[W] \\ &= \underbrace{\left[\bigoplus_{n_W>0} W^{\oplus n_W}\right]}_{=:V} - \underbrace{\left[\bigoplus_{n_W<0} W^{\oplus(-n_W)}\right]}_{=:V'}\end{aligned}$$

benutzen. □

Für den Fall $\mathrm{char} k \nmid \sharp G$ und $k = \overline{k}$ werden wir in Kürze (Theorem 4.22) sehen, dass $\sharp\mathrm{Irrep}(G)$ gerade die Anzahl der Konjugationsklassen ist. In diesem Sinn ist die additive Struktur von $R(G)$ eher uninteressant, da es sich um eine freie abelsche Gruppe von diesem (in Abhängigkeit von G bekannten) Rang handelt. Interessanter an $R(G)$ ist die Paarung $\langle -, - \rangle$ (sowie die durch das Tensorprodukt gegebene Multiplikation, die wir später einführen). Sie hat folgende Eigenschaften:

Satz 3.17. *Die Paarung*

$$\begin{aligned} R(G) \times R(G) &\to \mathbf{Z}, \\ (V, W) &\mapsto \langle V, W \rangle \end{aligned}$$

ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform. Letzteres bedeutet $\langle V, V \rangle > 0$ für alle $0 \neq V \in R(G)$, insbesondere ist die Paarung nicht entartet.

Beweis. Zunächst ist die Paarung auf $R(G)$ wegen der Additivität von $\langle -, - \rangle$ und der obigen Bemerkung wohldefiniert (und additiv, d.h. $\mathbf{Z}$-linear). Die Symmetrie ist nach 1. oben ebenfalls klar.

Um die positive Definitheit zu zeigen, sei $V \in R(G)$ gegeben. Es gilt nach dem Satz von Maschke (Theorem 1.17) $V = \sum n_i [V_i]$, wobei die $n_i \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ und die V_i alle paarweise verschieden gewählt sind. Dann ist nach Lemma 2.2

$$\begin{aligned}\langle V, V \rangle &= \sum_{i,j} n_i n_j \langle V_i, V_j \rangle \\ &= \sum_i n_i^2 \underbrace{\langle V_i, V_i \rangle}_{>0} \\ &> 0.\end{aligned}$$

□

3.1 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 3.18. Sei V die 3-dimensionale Permutationsdarstellung von S_3 (über einem Körper k der Charakteristik $\neq 2, 3$), siehe Beispiel 1.14. Bestimme die Unterdarstellung V^{S_3} und gib ein Komplement dieser Unterdarstellung an.

Übungsaufgabe 3.19. Sei V eine beliebige G-Darstellung. Sei $W \subset V$ eine Unterdarstellung, auf dem G trivial operiert. Zeige, dass $W \subset V^G$.

In Analogie zu Definition 1.12 ist eine *Quotientendarstellung* einer gegebenen G-Darstellung V eine G-Darstellung W, die als Vektorraum ein Quotientenvektorraum von V ist und so, dass die kanonische Abbildung $V \to W$ G-äquivariant ist.

Sei $V \twoheadrightarrow W$ eine Quotientendarstellung, auf der G trivial operiert. Zeige, dass die Abbildung $V \to W$ über V_G faktorisiert. (In diesem Sinne ist V_G die größte Quotientendarstellung, auf der G trivial operiert.)

Übungsaufgabe 3.20. Sei G endlich und $\mathrm{char} k \nmid |G|$ sowie V eine G-Darstellung. Zeige, dass V irreduzibel ist, genau dann, wenn V^* es ist.

Übungsaufgabe 3.21. Sei $f : V \to V'$ eine Abbildung von G-Darstellungen und W eine irreduzible Darstellung. Zeige, dass f sich zu einer Abbildung

$$f_W : V_W \to V'_W$$

auf den W-isotypischen Komponenten einschränkt. Folgere, dass f ein Isomorphismus ist, genau dann, wenn die f_W für alle $W \in \mathrm{Irrep}(G)$ Isomorphismen sind.

Kapitel 4

Charaktertheorie

Notation 4.1. In diesem Kapitel ist G eine endliche Gruppe, k ein Körper mit $\operatorname{char} k \nmid \sharp G$ (z.B. $k = \mathbf{Q}$, $\mathbf{C}$). Ab Satz 4.12 setzen wir noch voraus, dass k algebraisch abgeschlossen ist (z.B. $k = \mathbf{C}$).

Mit diesen Voraussetzungen können wir nun Schurs Lemma und den Satz von Maschke kombinieren. Das Ergebnis ist die sog. *Charaktertheorie*, welche einem ein sehr schlagkräftiges Tool zum Verständnis von Darstellungen verschafft. Genauer ist es so, dass die folgenden Ergebnisse, z.B. die Orthogonalitätsrelationen, es einem gestatten, die Charaktere irreduzibler Darstellungen zu bestimmen, ohne die irreduziblen Darstellungen selbst explizit beschreiben zu müssen (oder zu können).

Lemma 4.2. *Sei V eine endlich-dimensionale G-Darstellung. Der Charakter $\chi_V : G \to k$, $\chi_V(g) = \operatorname{tr}(V \stackrel{g}{\to} V)$ ist eine sog.* Klassenfunktion, *d.h. er erfüllt*

$$\chi_W(xgx^{-1}) = \chi_W(g). \tag{4.3}$$

Beweis. Dies folgt aus der aus der linearen Algebra bekannten Tatsache

$$\operatorname{tr}(f_1 f_2) = \operatorname{tr}(f_2 f_1)$$

für zwei Endomorphismen f_1, f_2 des gleichen Vektorraums. □

Nach Lemma 3.3 gibt es für jede endlich-dimensionale G-Darstellung V einen Projektor

$$P : V \to V, \pi(v) = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} gv.$$

Er erfüllt $P(V) = V^G$ und

$$V = \ker P \oplus V^G.$$

Damit gilt

$$\dim V^G = \operatorname{tr}(P) = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(V \stackrel{g}{\to} V) = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \chi_V(g). \tag{4.4}$$

Gegeben zwei G-Darstellungen V, W, möchten wir dies anwenden, um $\dim \operatorname{Hom}_G(V, W)$ zu berechnen. Wir führen dazu noch eine allgemeine Definition ein:

Definition 4.5. Sei V eine G- und W eine H-Darstellung. Wir bezeichnen mit

$$V \boxtimes W$$

die $G \times H$-Darstellung mit zugrundeliegendem Vektorraum $V \otimes W$ (alle nicht-dekorierten Tensorprodukte sind über k), auf dem $(g, h) \in G \times H$ operiert als

$$(g, h) \cdot (\sum v_i \otimes w_i) := \sum (gv_i) \otimes (hw_i).$$

(Mittels Bemerkung 1.3 sieht man sofort, dass es sich um eine Darstellung handelt.)

Für den Fall $G = H$ bezeichnen wir die Einschränkung dieser $G \times G$-Darstellung auf die Untergruppe $G \cong \{(g, g), g \in G\} \subset G \times G\}$ mit

$$V \otimes W.$$

Expliziter gesagt: der zugrundeliegende Vektorraum ist (nach wie vor) $V \otimes W$, $g \in G$ wirkt durch

$$g \cdot (\sum v_i \otimes w_i) = \sum (gv_i) \otimes (gw_i).$$

Lemma 4.6. *Für beliebige endlich-dimensionale G-Darstellungen V, W, U bestehen folgende kanonische Isomorphismen von G-Darstellungen*

$$V \otimes 1 \cong V, 1 \otimes V \cong V.$$

$$\mathrm{Hom}(V, W) \otimes U \cong \mathrm{Hom}(V, W \otimes U),$$

insbesondere

$$V^* \otimes U \cong \mathrm{Hom}(V, U). \tag{4.7}$$

Beweis. Die Isomorphismen sind jeweils bekannt aus der linearen Algebra, wenn wir die G-Wirkung vernachlässigen. Sie sind gegeben durch

$$v \otimes \lambda \mapsto \lambda v, \lambda \otimes v \mapsto \lambda v$$

bzw.

$$f \otimes u \mapsto (v \mapsto f(v) \otimes u).$$

Man prüft mittels der Definitionen sofort nach, dass diese Vektorraumisomorphismen G-äquivariant sind. □

Lemma 4.8. *Für endlich-dimensionale G-Darstellungen V und W und eine endlich-dimensionale H-Darstellung U gilt:*

$$\chi_{V \oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g),$$
$$\chi_{V \boxtimes U}(g, h) = \chi_V(g)\chi_U(h),$$
$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,U)}(g, h) = \chi_V(g^{-1})\chi_U(h),$$

insbesondere

$$\chi_{V \otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g),$$
$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \chi_V(g^{-1})\chi_W(g),$$
$$\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}).$$

Beweis. Seien $\{v_i\}$ und $\{u_j\}$ (endliche) Basen von V und U. Dann ist $\{(v_i \otimes u_j)\}$ eine Basis von $V \otimes U$. Fixiere $g \in G$. Sei $gv_i = \sum_s a_{is} v_j$, $hu_j = \sum_t b_{jt} u_t$ mit $a_{is}, b_{jt} \in k$. Es gilt dann $(g, h)(v_i \otimes u_j) = gv_i \otimes hu_j = (\sum_s a_{is} v_s) \otimes (\sum_s b_{jt} w_t) = \sum_{s,t} a_{is} b_{jt} v_s \otimes w_t$. Also

$$\chi_{V \otimes U}((g, h)) = \mathrm{tr}(V \otimes U \xrightarrow{g} V \otimes U) = \sum_{i,j} a_{ii} b_{jj} = (\sum_i a_{ii})(\sum_j b_{jj}) = \chi_V(g)\chi_U(h)$$

Die Berechnung von $\chi_{\mathrm{Hom}(V,U)}$ erfolgt ähnlich, indem man verwendet, dass die Abbildungen $f_{ij} : V \to U$, $f_{ij}(v_s) = u_j$ für $s = i$ und 0 sonst eine Basis von $\mathrm{Hom}(V, U)$ bilden.

Die Aussage für $V \oplus W$ folgt noch leichter mittels der Basis $\{(v_i, 0)\} \cup \{(0, w_j)\}$.

Die letzten drei Aussagen sind Spezialfälle der vorigen Aussagen. □

Aus (4.4) und diesem Lemma folgt die für alles Weitere entscheidende Formel:

Folgerung 4.9. *Sei k ein Körper mit* $\mathrm{char} \nmid |G|$. *Für zwei endlich-dimensionale G-Darstellungen gilt die folgende sog.* Multiplizitätenformel

$$\langle V, W \rangle_G = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \chi_V(g^{-1})\chi_W(g).$$

Definition 4.10. Gegeben eine irreduzible Darstellung W und eine beliebige endlich-dimensionale Darstellung V. Die *Vielfachheit* von W in V ist die Zahl

$$\langle V, W \rangle \quad (\in \mathbf{N}).$$

Sei

$$V = \bigoplus_i V_i$$

eine Zerlegung einer beliebigen endlich-dimensionalen Darstellung in irreduzible Darstellungen V_i. Dann gilt wegen Folgerung 2.3:

$$\sharp\{i : V_i \cong W\} = \langle V, W \rangle.$$

D.h. wir sehen erneut, dass die Anzahl der Summanden, die isomorph zu W sind, wohldefiniert ist (d.h. unabhängig von der Wahl der Zerlegung).

Folgerung 4.11. *Sei k ein Körper mit* $\operatorname{char} k \nmid |G|$. *Zwei endlich-dimensionale G-Darstellungen V, V' sind isomorph genau dann, wenn ihre Charaktere übereinstimmen:*

$$V \cong V \iff \chi_V = \chi_{V'}.$$

Beweis. Die Richtung "⇒" folgt sofort aus der Definition. Umgekehrt genügt es zu zeigen, dass die Vielfachheit einer beliebigen irreduziblen Darstellung W in V und in V' übereinstimmt. Dies folgt aus

$$\langle V, W \rangle = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \chi_V(g^{-1}) \chi_W(g).$$

□

Für alle folgenden Aussagen in diesem Kapitel setzen wir voraus, dass k algebraisch abgeschlossen ist (und $\operatorname{char} k \nmid |G|$, z.B. $k = \mathbf{C}$).

Satz 4.12. *(*Schurs Lemma, starke Version*) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit* $\operatorname{char} k \nmid |G|$. *Eine endlich-dimensionale G-Darstellung V ist irreduzibel genau dann, wenn*

$$\langle V, V \rangle = \dim \operatorname{Hom}_G(V, V) = 1 \tag{4.13}$$

gilt (d.h. alle Endomorphismen sind skalare Vielfache von id_V*).*

Beweis. Die Richtung "⇒" wurde in Folgerung 2.3 schon gezeigt. Umgekehrt, wenn $0 \subsetneq U \subset V$ eine Unterdarstellung ist gibt es nach dem Satz von Maschke eine Unterdarstellung W mit $U \oplus W = V$. Die Projektion $f : V \to U$ ist dann G-äquivariant (!), und ist $\neq 0$. Da $\operatorname{End}_G(V)$ 1-dimensional ist, d.h. $f = \lambda \mathrm{id}_V$ mit $\lambda \in k \setminus \{0\}$ folgt $W = \ker f = 0$, d.h. $U = V$. □

Im folgenden Satz betrachten wir die Wirkung von $G \times G$ auf G gegeben durch

$$(g, h) \cdot x = g x h^{-1}$$

und die hieraus resultierende Permutationsdarstellung von $G \times G$ auf $\bigoplus_{g \in G} k$. Für einen Basisvektor $e_x = (0, \dots, 1_{\text{an der Stelle } x}, \dots, 0)$ $(x \in G)$ gilt also $(g, h) \cdot e_x = e_{g x h^{-1}}$. Es gilt dann

$$\chi_{kG}((g, h)) = \sum_{x \in G} \begin{cases} 1 & g x h^{-1} = x \Leftrightarrow x^{-1} g x = h \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} . \tag{4.14}$$

Theorem 4.15. *(*Satz von Peter-Weyl für endliche Gruppen*) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit* $\operatorname{char} k \nmid |G|$. *Es besteht ein natürlicher Isomorphismus von $G \times G$-Darstellungen*

$$kG = \bigoplus_{W \in \operatorname{Irrep}(G)} \operatorname{End}(W). \tag{4.16}$$

Die direkte Summe läuft über die Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen von G (nicht von $G \times G$). $\operatorname{End}(W)$ *bezeichnet den Vektorraum der (nicht notwendig G-äquivarianten) Endomorphismen von W, aufgefasst als $G \times G$-Darstellung.*

Jeder Summand $\operatorname{Hom}(W, W)$ *ist eine irreduzible $G \times G$-Darstellung. Außerdem sind die verschiedenen Summanden paarweise nicht zueinander isomorph, d.h. die Vielfachheit jedes Summanden ist 1.*

Bemerkung 4.17. Die obige Bezeichnung "Satz von Peter-Weyl" ist historisch nicht korrekt, da der obige Satz schon wesentlich älter ist. Der (richtige) Satz von Peter und Weyl ist eine analoge Aussage für Darstellungen *kompakter topologischer Gruppen*, z.B. $G = S^1$: dessen Aussage lautet, dass die irreduziblen G-Darstellungen wiederum endlich-dimensional sind sowie dass

$$L^2(G) = \widehat{\bigoplus}_{W \in \operatorname{Irrep}(G)} \operatorname{End}(W),$$

wobei L^2 den Raum der quadrat-integrierbaren Funktionen auf G bezüglich eines Haar-Maßes bezeichnet und $\widehat{\bigoplus}$ die sog. direkte Summe von Hilbert-Räumen bezeichnet. Manche Autoren benennen den Satz jedoch ebenfalls nach Peter-Weyl, da die Ähnlichkeit der Aussagen so stark ist.

Wir benutzen im Beweis folgendes Lemma:

Lemma 4.18. *Seien G, H endliche Gruppen mit* $\operatorname{char} k \nmid G, \operatorname{char} k \nmid H$ *(und k algebraisch abgeschlossen). Falls V eine irreduzible G-Darstellung und W eine irreduzible H-Darstellung ist, so sind $V \boxtimes W$ und* $\operatorname{Hom}(V, W)$ *beides irreduzible $G \times H$-Darstellungen.*

Beweis. Um zu zeigen, dass $V \boxtimes W$ irreduzibel ist, wenden wir Satz 4.12 an:

$$\begin{aligned}\langle V \boxtimes W, V \boxtimes W\rangle_{G\times H} &= \frac{1}{\sharp G \cdot \sharp H} \sum_{(g,h)} \chi_{V\boxtimes W}((g,h))\chi_{V\boxtimes W}((g,h)^{-1}) \\ &= \frac{1}{\sharp G \cdot \sharp H} \sum_{(g,h)} \chi_V(g)\chi_W(h)\chi_V(g^{-1})\chi_W(h^{-1}) \\ &= 1\end{aligned}$$

Die Behauptung für $\mathrm{Hom}(V,W)$ folgt aus $\mathrm{Hom}(V,W) \cong V^* \boxtimes W$ und der Tatsache, dass duale Darstellungen irreduzibler wieder irreduzibel sind (Übungsaufgabe 3.20). □

Beweis. Sei W eine irreduzible G-Darstellung. Nach Lemma 4.18 ist $\mathrm{Hom}(W,W)$ eine irreduzible $G\times G$-Darstellung.

Wir berechnen nun die Vielfachheit von $\mathrm{Hom}(W,W)$ in kG:

$$\begin{aligned}\langle kG, \mathrm{Hom}(W,W)\rangle_{G\times G} &= \frac{1}{\sharp(G\times G)} \sum_{(g,h)\in G\times G} \chi_{kG}((g,h)^{-1})\chi_{\mathrm{Hom}(W,W)}((g,h)) \\ &= \frac{1}{\sharp(G\times G)} \sum_{(g,h,x)\in G\times G\times G, x^{-1}g^{-1}x=h^{-1}} 1\cdot \chi_W(g^{-1})\chi_W(h) \\ &= \frac{1}{\sharp(G\times G)} \sum_{(g,h,x)\in G^{\times 3}: xgx^{-1}=h} 1\cdot \chi_W(g^{-1})\chi_W(h) \\ &= \frac{1}{\sharp(G\times G)} \sum_{x\in G}\sum_{g\in G} \chi_W(g^{-1})\chi_W(g) \\ &= 1.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Die erste Gleichheit ist die Definition, dann benutzen wir die Berechnung von $\chi_{\mathrm{Hom}(W,W)}$ in Lemma 4.8, dann (4.14), dann (4.3), sowie am Schluss (4.13). (Die obige Gleichung $\langle kG, \mathrm{Hom}(W,W)\rangle_{G\times G} = 1$ kann man auch ohne Charaktere zeigen, siehe Übungsaufgabe 4.41.) Da die $\mathrm{End}(W)$ irreduzibel sind, erhalten wir eine injektive Abbildung (von $G\times G$-Darstellungen)

$$\bigoplus_{W\in\mathrm{Irrep}_G} \mathrm{End}(W) \to kG.$$

Wir zeigen, dass die Dimensionen beider Räume gleich (und endlich) sind, hieraus folgt die Behauptung (4.16). Für jede G-Darstellung Q gibt es einen Isomorphismus (von k-Vektorräumen)

$$\mathrm{Hom}_G(kG, Q) \cong Q, f \mapsto f(e)$$

($e \in kG$ ist der Basisvektor, der zum neutralen Element gehört), denn eine G-äquivariante Abbildung $kG \to Q$ ist eindeutig durch den Wert an e festgelegt. Es gilt also $\langle kG, Q\rangle = \dim Q$. In einer Zerlegung $kG = \bigoplus_{V_i\in\mathrm{Irrep}_G} V_i^{\oplus n_i}$ in irreduzible G-Darstellungen taucht also jede irreduzible G-Darstellung W genau $\dim W$-mal auf. Also gilt

$$\dim kG = \sum_{W\in\mathrm{Irrep}_G} (\dim W)^2.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass die $\mathrm{End}(W)$ paarweise nicht isomorph sind. Aus der inzwischen bewiesenen Zerlegung (4.16) erhalten wir

$$\sum_{V\in\mathrm{Irrep}(G)} \langle \mathrm{End}(V), \mathrm{End}(W)\rangle_{G\times G} = 1.$$

Da die Summanden links alle in $\mathbf{N}$ sind, muss genau ein Summand, nämlich für $V = W$, Beitrag 1 geben, die übrigen 0, d.h. wie behauptet ist $\mathrm{End}(V) \ncong \mathrm{End}(W)$ (als $G\times G$-Darstellungen) für $V \ncong W$. □

Im Beweis wurde mit gezeigt:

Folgerung 4.20. *Als Darstellung von G hat kG folgende Zerlegung in irreduzible Summanden:*

$$kG = \bigoplus_{W\in\mathrm{Irrep}(G)} W^{\dim W}.$$

Folgerung 4.21. *Es gilt*

$$\sharp G = \sum_{W\in\mathrm{Irrep}(G)} (\dim W)^2.$$

Theorem 4.22. *Die Anzahl der irreduziblen G-Darstellungen ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen in G.*

Beweis. Nach Satz 4.12 und Theorem 4.15 gilt

$$\langle kG, kG\rangle_{G\times G} = \sum_{V,W\in \mathrm{Irrep}(G)} \langle \mathrm{End}V, \mathrm{End}W\rangle_{G\times G} = \sum_{V\in \mathrm{Irrep}(G)} 1.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die linke Seite der Anzahl der Konjugationsklassen in G entspricht. Sei hierzu $f \in \mathrm{Hom}(kG, kG)$. Die Bedingung, dass f (k-linear und) äquivariant bezüglich der Wirkung es 1. G-Faktors ist, legt f insofern fest, dass f durch das Bild von 1_G bestimmt ist. Es gilt also $\mathrm{Hom}_G(kG, kG) = kG$. Ein Element $\sum a_g g \in kG$ entspricht der G-äquivarianten Abbildung

$$f : h \mapsto \sum a_g hg, kG \to kG.$$

Eine solche Abbildung ist äquivariant bezüglich der Wirkung des 2. G-Faktors genau dann, wenn für alle $h, t \in G$ gilt

$$\sum_g a_g ht^{-1} g = f(ht^{-1}) = f(h)t^{-1} = \sum_g a_g hgt^{-1}.$$

Da gilt $f(ht^{-1}) = hf(t^{-1})$ und $f(h)t^{-1} = hf(e)t^{-1}$, ist die obige Bedingung äquivalent zu dem Spezialfall wo $h = 1$ ist, d.h. äquivalent zur Bedingung, dass für alle $t \in G$ gilt

$$\sum_g a_g t^{-1} g = \sum_g a_g gt^{-1},$$

wiederum äquivalent zu

$$\sum_g a_g t^{-1} gt = \sum_g a_g g.$$

Die linke Seite können wir auch schreiben als $\sum_g a_{tgt^{-1}} g$. Es folgt also für alle $t \in G$ $a_g = a_{tgt^{-1}}$, d.h. die Koeffizienten in einer Konjugationsklasse sind alle gleich (und ansonsten beliebig). $\square$

Bemerkung 4.23. Für G abelsch bestehen die Konjugationsklassen aus je einem Element, also gibt es $\sharp G$ viele. Damit ist Folgerung 2.4 ein Spezialfall von Theorem 4.22.

Theorem 4.24. *Seien G, H endliche Gruppen mit $\mathrm{char} k \nmid \sharp G$, $\mathrm{char} k \nmid \sharp H$ und k algebraisch abgeschlossen. Es bestehen Bijektionen*

$$\mathrm{Irrep}(G) \times \mathrm{Irrep}(H) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Irrep}(G \times H),$$
$$(V, W) \mapsto V \boxtimes W,$$

sowie

$$\mathrm{Irrep}(G) \times \mathrm{Irrep}(H) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Irrep}(G \times H),$$
$$(V, W) \mapsto \mathrm{Hom}(V, W).$$

d.h. die irreduziblen Darstellungen von $G\times H$ sind genau die Darstellungen der Form $V\boxtimes W$, wobei $V \in \mathrm{Irrep}(G)$ und $W \in \mathrm{Irrep}(H)$. Oder auch: die irreduziblen Darstellungen von $G \times H$ sind genau die Darstellungen der Form $\mathrm{Hom}(V, W)$, wobei $V \in \mathrm{Irrep}(G)$ und $W \in \mathrm{Irrep}(H)$.

Nach (3.15) induziert die Abbildung $(V, W) \mapsto V \boxtimes W$ also einen Isomorphismus abelscher Gruppen

$$R_k(G) \otimes R_k(H) \xrightarrow{\cong} R_k(G \times H). \tag{4.25}$$

Beweis. (a) Nach Lemma 4.18 landen beide Abbildungen in der Tat in $\mathrm{Irrep}(G \times H)$.

(b) Die Anzahl $\sharp\mathrm{Irrep}(G\times H)$ ist laut Theorem 4.22 die Anzahl der Konjugationsklassen in $G\times H$, diese sind von der Form $C_g \times C_h$, d.h. Produkte von Konjugationsklassen in G und H. Wenden wir nochmals Theorem 4.22 an, ist insbesondere ist ihre Anzahl gleich $(\sharp\mathrm{Irrep}G) \cdot (\sharp\mathrm{Irrep}H)$.

(c) Es genügt daher, die Injektivität der Abbildung zu zeigen, d.h. zu zeigen, dass für $V \ncong V'$ oder $W \ncong W'$ auch $V \boxtimes W \ncong V' \boxtimes W'$ ist. In der Tat, wenn z.B. $V \ncong V'$, so gibt es ein $g \in G$ mit $\chi_V(g) \neq \chi_{V'}(g)$, dies liefert $\chi_{V\boxtimes W} \neq \chi_{V'\boxtimes W'}$ und damit $V \boxtimes W \ncong V' \boxtimes W'$.

(d) Die Aussage über Darstellungen der Form $\mathrm{Hom}(V, W)$ folgt hieraus, da V genau dann irreduzibel ist, wenn V^* es ist (Übungsaufgabe 3.20) und $\mathrm{Hom}(V, W) = V^* \boxtimes W$ (vgl. (4.7)).

$\square$

Bemerkung 4.26. Theorem 4.24 ist auch gültig, wenn die Voraussetzung $\mathrm{char} k \nmid \sharp G, \sharp H$ fallen gelassen wird. Siehe [Kow14, Prop. 2.3.23] für einen (grundlegend anderen) Beweis der Tatsache in diesem Fall.

Wir hatten $R(G)$ bereits als Darstellungs*ring* bezeichnet, jedoch noch nicht mit einer Ringstruktur versehen. Dies holen wir jetzt nach:

Satz 4.27. *Die Abbildung*

$$(V, W) \mapsto V \otimes W$$

induziert eine kommutative Ringstruktur auf $R(G)$. (Dieser Teil der Aussage gilt auch für $\mathrm{char} k | \sharp G$.)

Fener wird (4.25) bezüglich dieser Ringstruktur ein Ring-Isomorphismus.

Beweis. Um zu sehen, dass die Multiplikation auf $R(G)$ wohldefiniert ist, reicht es zu zeigen, dass für Darstellungen V, A und eine Unterdarstellung $A' \subset A$ gilt: $V \otimes A'$ ist Unterdarstellung von $V \otimes A$ mit Quotientendarstellung $V \otimes (A/A')$ (und analog mit $A \otimes V$ usw.) Man sieht sofort an der Definition, dass die kanonischen Abbildungen $V \otimes A' \to V \otimes A \to V \otimes (A/A')$ Abbildungen von G-Darstellungen sind. Es genügt also zu zeigen, dass es sich um Unter-Vektorräume mit dem angegebenen Quotientenvektorraum handelt. Dies ist nur eine Aussage über die zugrundeliegenden Vektorräume, und für diese besteht (auch im Fall $\mathrm{char} k | \sharp G$) ein Isomorphismus $A \cong A' \oplus (A/A')$. Es gilt daher ein Isomorphismus von Vektorräumen

$$V \otimes A \cong V \otimes A' \oplus V \otimes (A/A'),$$

hieraus folgt die Behauptung.

Die einfache Überprüfung der Ringaxiome wird hier übersprungen, sie folgen alle aus bekannten Eigenschaften des Tensorprodukts, z.B. $V \otimes (V' \oplus V'') \cong V \otimes V' \oplus V \otimes V''$ liefert das Distributitivitätsgesetz in $R(G)$. Die Kommutativität folgt aus dem Isomorphismus $V \otimes W \cong W \otimes V$.

Die letzte Aussage folgt sofort aus der Definition der Multiplikation im Tensorprodukt von $\mathbf{Z}$-Algebren sowie der Tatsache $(V \otimes V') \boxtimes (W \otimes W') \cong (V \boxtimes W) \otimes (V' \boxtimes W')$. □

In vielen Anwendungen ist der Fall $k = \mathbf{C}$ besonders relevant. Viele Autoren schreiben daher (im Fall komplexer Darstellungen)

$$\langle V, W \rangle = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \overline{\chi_W(g)}.$$

($\overline{}$ bezeichnet hierbei die komplexe Konjugation.) Die Begründung hierfür gibt folgendes Lemma:

Lemma 4.28. *Für eine komplexe G-Darstellung V gilt*

$$\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$$

Beweis. Wir schreiben der Klarheit halber $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ für die Darstellung. Sei $g \in G$. Da G endlich ist, hat auch $\pi(g) : V \to V$ endliche Ordnung, d.h. $g^r = 1$ für ein geeignetes $r > 0$. Damit haben auch die komplexen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ endliche Ordnung, d.h. sie sind gewisse Einheitswurzeln, und es gilt insbesondere $|\lambda_i| = 1$.

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\overline{\chi_V(g)} &= \overline{\mathrm{tr}(g : V \to V)} \\
&= \sum_i \overline{\lambda_i} \\
&= \sum_i \lambda_i^{-1} \\
&= \mathrm{tr}(\pi(g)^{-1} : V \to V) \\
&= \mathrm{tr}(\pi(g^{-1}) : V \to V) \\
&= \chi_V(g^{-1}).
\end{aligned}$$

Wir haben benutzt, dass die Spur eines Endomorphismus die Summe seiner Eigenwerte ist, sowie dass die Eigenwerte von f^{-1} gerade die Reziproken der Eigenwerte von f sind. □

Folgerung 4.29. *Eine endlich-dimensionale komplexe G-Darstellung V ist* selbst-dual, *d.h. es gibt einen G-äquivarianten Isomorphismus*

$$V \cong V^*$$

genau dann, wenn $\chi_V(g) \in \mathbf{R}$ (und nicht nur in $\mathbf{C}$) für alle $g \in G$ gilt.

Beweis. Nach Folgerung 4.11 gilt $V \cong V^*$ genau dann, wenn $\chi_V = \chi_{V^*}$. Es gilt aber $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$, dies ist genau dann gleich $\chi_V(g)$, wenn $\chi_V(g)$ reell ist. □

4.1 Die Charaktertafel

Die Charaktertafel ist ein grundlegendes, oft recht einfaches Instrument zur Behandlung von G-Darstellungen. Wir setzen nach wie vor voraus, dass k algebraisch abgeschlossen und $\operatorname{char} k \nmid |G|$.

Definition 4.30. Die *Charaktertafel* ist die Matrix, deren Zeilen indiziert werden durch die irreduziblen G-Darstellungen W und deren Spalten indiziert werden durch die Konjugationsklassen $C \subset G$. Der Eintrag an der Stelle (C, W) ist definiert als

$$\chi_W(C).$$

(Hierbei ist $\chi_W(C) := \chi_W(g)$ für ein beliebiges $g \in C$. Da χ_W eine Klassenfunktion, d.h. konstant auf C ist, ist dies unabhängig von der Wahl von $g \in C$.)

Es ist außerdem konventionsmäßig üblich, dass die erste Zeile für die triviale Darstellung und die erste Spalte für $\{1\} \subset G$ gewählt wird.

Als Beispiel bestimmen wir im folgenden die Charaktertafel für S_3 wobei wir die triviale Darstellung 1, die Signums-Darstellung ϵ und die 2-dimensionale Darstellung ρ_2 in (1.8) verwenden. Wie üblich nutzen wir die Zykeldarstellung von Elementen in S_n, z.B. bedeutet (12) die Permution $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$.

	1	(12)	(123)
1	1	1	1
ϵ	1	-1	1
ρ_2	2	0	-1

(Beachte für ρ_2 dass $\omega + \omega^2 = -1$, da ω eine primitive 3. Einheitswurzel ist, d.h. $1 + \omega + \omega^2 = 0$.)

Satz 4.31. *(*1. Orthogonalitätsrelation*) Seien $V, W \in \operatorname{Irrep}(G)$ und sei V^* wie üblich die duale Darstellung von V. Es gilt*

$$\frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_W(g) = \begin{cases} 1 & W = V^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis. Die linke Seite ist, nach (4.4) und Lemma 4.8, gerade $\dim(V \otimes W)^G$. Nach Lemma 4.6 haben wir einen Isomorphismus (von G-Darstellungen) $V \otimes W \cong \operatorname{Hom}(V^*, W)$ und erhalten $(V \otimes W)^G = \operatorname{Hom}_G(V^*, W)$. Gemäß Übungsaufgabe 3.20 ist V^* irreduzibel. Nach Schurs Lemma (Satz 4.12) ist $\dim_G(V^*, W)$ also genau die rechte Seite der Behauptung. □

Beispiel 4.32. Für $G = S_3$ sind die Konjugationsklassen der Elemente in der obigen Tafel gerade:

- 1
- (12), (13), (23)
- (123), (132)

Da χ_V auf Konjugationsklassen konstant ist erhalten wir für $V \not\cong V^*$:

$$\chi_V(1)\chi_W(1) + 3\chi_V((12))\chi_W((12)) + 2\chi_V((123))\chi_W((123)) = 0,$$

in Übereinstimmung mit der obigen Charaktertafel.

Satz 4.33. *Für $g, h \in G$ gilt die sog.* 2. Orthogonalitätsrelation

$$\sum_{W \in \operatorname{Irrep}(G)} \chi_W(h) \chi_W(g^{-1}) = \begin{cases} \sharp G / \sharp C_g & \text{falls } h \in C_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hierbei ist $C_g := \{xgx^{-1}, x \in G\}$ die Konjugationsklasse *von g.*

Beweis. Betrachten wir kG als $G \times G$-Darstellung so gilt

$$\chi_{kG}((g,h)) = \sharp\{x \in G, gxh^{-1} = x\} = \begin{cases} \sharp G / \sharp C_g & \text{falls } h \in C_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

In der Tat, für $h \notin C_g$ ist dies klar. Für $h \in C_g$ nutzen wir, dass G transitiv (mittels Konjugation) auf C_g operiert und es gilt $\sharp G = \sharp C_g \cdot \sharp \operatorname{Stab} h$. Dieser Stabilisator ist gerade $\{x \in G, gxh^{-1} = x\}$.

Aus dem Satz von Peter-Weyl folgt nun die Behauptung, denn $\chi_W(h)\chi_W(g^{-1}) = \chi_{\operatorname{End}(W)}((g,h))$. □

Beispiel 4.34. Im Fall $k = \mathbf{C}$ gilt nach Lemma 4.28 $\chi_W(g^{-1}) = \overline{\chi_W(g)}$, d.h. wir erhalten

$$\sum_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \chi_W(h)\overline{\chi_W(g)} = \begin{cases} \sharp G/\sharp C_g & \text{falls } h \in C_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

D.h. unter dem Standard-Skalarprodukt $\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$ auf $\mathbf{C}^n$ sind die Spalten der Charaktertafel einer Gruppe orthogonal.

Auch dies lässt sich im Fall S_3 sofort bestätigen.

Als weiteres Beispiel berechnen wir die Charaktertafel der Gruppe

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x & t \\ & y \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q). \tag{4.35}$$

Wir setzen hierbei $q > 2$ voraus (ansonsten handelt es sich bei B um die Gruppe $\mathbf{Z}/2$, deren Darstellungen wir bereits kennen). (Der Buchstabe B steht für *Borel-Untergruppe*, dies ist ein Begriff aus der Theorie der algebraischen Gruppen. Wir werden die Gruppe B im Zuge der Untersuchung von Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ wieder antreffen.) Wir beginnen mit der Bestimmung der Konjugationsklassen. Man berechnet

$$\begin{pmatrix} x & t \\ & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & u \\ & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & t \\ & y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & y^{-1}(t(b-a) + xu) \\ & b \end{pmatrix}.$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

- $a \neq b$: in diesem Fall nimmt $t(b-a)$ alle Werte in $\mathbf{F}_q$ an, insbesondere hat die Konjugationsklasse dieser Matrix genau q Elemente. Ein Repräsentant der Klasse ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$.
- $a = b$, $u \neq 0$: dann durchläuft $y^{-1}xu$ (für $x, y \in \mathbf{F}_q^\times$) gerade $\mathbf{F}_q^\times$, d.h. die Konjugationsklasse hat $q-1$ Elemente. Ein Repräsentant der Klasse ist $\begin{pmatrix} a & 1 \\ & a \end{pmatrix}$.
- $a = b$, $u = 0$: in diesem Fall hat die Konjugationsklasse genau 1 Element (d.h. die Matrix liegt im Zentrum von B).

Wir erhalten

$$(q-1)(q-2) + (q-1) + (q-1) = q(q-1)$$

Konjugationsklassen, d.h. $q(q-1)$ irreduzible B-Darstellungen.

Wir beginnen nun mit den eindimensionalen Darstellungen, diese faktorisieren über $B_{\mathrm{ab}} = B/[B,B]$. Durch explizite Rechnung zeigt man

$$\begin{pmatrix} x & t \\ & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & u \\ & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & t \\ & y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & u \\ & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u(x-y)+t(b-a)}{yb} \\ & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.36}$$

wobei der rechte obere Eintrag Elemente in $\mathbf{F}_q$ durchläuft. Hierbei nutzen wir $q > 2$: dann kann man $a = b = y = 1$ wählen sowie $x \neq 1$, so dass $u(x-1)$ alle Elemente in $\mathbf{F}_q$ durchläuft. Es gilt daher $B_{\mathrm{ab}} = (\mathbf{F}_q^\times)^2$, gegeben durch $\begin{pmatrix} a & u \\ & b \end{pmatrix} \mapsto (a, b)$. Wir erhalten also $(q-1)^2$ eindimensionale B-Darstellungen, nämlich

$$\rho_{\psi_1,\psi_2} : \begin{pmatrix} a & u \\ & b \end{pmatrix} \mapsto \psi_1(a)\psi_2(b),$$

wobei $\psi_1, \psi_2 : \mathbf{F}_q \to k^\times$.

Wir suchen noch weitere irreduzible Darstellungen W_i mit

$$|B| - (q-1)^2 = q(q-1)^2 - (q-1)^2 = (q-1)^3 \stackrel{!}{=} \sum (\dim W_i)^2.$$

Da B $q(q-1)$ Konjugationsklassen hat, fehlen uns noch $q(q-1) - (q-1)^2 = q-1$ solcher Darstellungen. Es ist aus Symmetriegründen suggestiv (und, wie sich a posteriori zeigt, richtig), anzunehmen, dass es sich um $q-1$ Darstellungen der Dimension $q-1$ handelt. Diese werden wir nun konstruieren.

Hierzu betrachte die Menge

$$X := \mathbf{P}^1(\mathbf{F}_q) := \{1\text{-dimensionale } \mathbf{F}_q\text{-Untervektorräume von } \mathbf{F}_q^2\}.$$

(Die Notation $\mathbf{P}^1$ steht für die sog. *projektive Gerade*.) Auf $\mathbf{F}_q^2$ operiert $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q) = \mathrm{GL}(\mathbf{F}_q^2)$ und insbesondere die Untergruppe B durch Linksmultiplikation. Dies liefert eine Wirkung von B auf X, nämlich

$$g \cdot \mathbf{F}_q x := \mathbf{F}_q g x.$$

Die von $e_1 := (1\ 0)^T$ aufgespannte Gerade $\mathbf{F}_q e_1$ wird gerade von B festgehalten, wir betrachten daher die B-Wirkung auf $Y := X \setminus \{\mathbf{F}_q e_1\}$. Es gilt $Y = \{\mathbf{F}_q(0\ 1)^T\} \sqcup \{\mathbf{F}_q(1\ \lambda)^T, \lambda \in \mathbf{F}_q^\times\}$, also hat Y genau q Elemente. Die Permutationsdarstellung

$$k[Y]$$

hat eine triviale Unterdarstellung $1 \cong \{k(1,\dots,1)\}$. Sei $E := \{(a_y) \in k[Y], \sum_{y\in Y} a_y = 0\}$. Dies ist ein Komplement (als B-Darstellung) von 1, d.h. es gilt $k[Y] = 1 \oplus E$. Wir zeigen nun $\langle E, E\rangle = 1$, hieraus folgt, dass es sich bei E um eine irreduzible $(q-1)$-dimensionale Darstellung von B handelt. Wir verwenden hierzu $\chi_{k[Y]}(g) = \sharp\{y \in Y, gy = y\}$ sowie $\chi_{k[Y]}(g^{-1}) = \chi_{k[Y]^*}(g) = \chi_{k[Y]}(g)$, da $k[Y]$ selbstdual ist (Übungsaufgabe 4.47).

- Wenn $g = \begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix} \in Z(B)$, gilt $gy = y$ für jede Gerade $y \in Y$.
- Wenn $g = \begin{pmatrix} a & 1 \\ & a \end{pmatrix}$, so gilt $gy = y$ für kein $y \in Y$: die Gleichung bedeutet gerade, dass g einen von $e_1 = (1\ 0)^T$ linear unabhängigen (wegen $Y = X \setminus \{\mathbf{F}_q e_1\}$) Eigenvektor (in $\mathbf{F}_q^2$) hätte; die Matrix ist jedoch nicht diagonalisierbar.
- Für $g = \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$ mit $b \neq a$ gibt es genau einen Fixpunkt in Y, nämlich $\mathbf{F}_q(0\ 1)^T$.

Wir erhalten den Charakter von E:

	$\begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$ mit $a \neq b$
χ_E	$q-1$	-1	$0.$

Es folgt

$$\langle E, E\rangle = \frac{1}{\sharp B}\left((q-1)^2 \times (q-1) + (q-1) \times (q-1)\right) = 1.$$

Ferner ist für jede der obigen $(q-1)^2$ eindimensionalen B-Darstellungen ρ_{ψ_1,ψ_2} auch $F_{\psi_1,\psi_2} := E \otimes \rho_{\psi_1,\psi_2}$ irreduzibel (Übungsaufgabe 4.51) und hat Charakter

	$\begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$ mit $a \neq b$
χ_F	$(q-1)\psi_1(a)\psi_2(a)$	$-\psi_1(a)\psi_2(a)$	$0.$

Also ist $F_{\psi_1,\psi_2} \cong F_{\psi_1',\psi_2'}$ genau dann, wenn $\psi_1\psi_2 = \psi_1'\psi_2'$, wir erhalten also $q-1$ irreduzible Darstellungen.

Satz 4.37. *Die Charaktertafel der Borelgruppe*

$$B := \left\{\begin{pmatrix} x & t \\ & y \end{pmatrix}\right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q),\ q > 2$$

lautet wie folgt:

	$\begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$ *mit* $a \neq b$
ρ_{ψ_1,ψ_2}	$\psi_1(a)\psi_2(a)$	$\psi_1(a)\psi_2(a)$	$\psi_1(a)\psi_2(b)$
$E \otimes \rho_{\psi,1}$	$(q-1)\psi(a)$	$-\psi(a)$	*0*

Wir werden später noch die Charaktertafel von $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ bestimmen. Die Aussagekraft der Charaktertafel ist jedoch beschränkt, wie wir an folgendem Beispiel sehen:

Definition 4.38. Sei D_4 die sog. *Diedergruppe*, d.h. die Gruppe der Symmetrien eines Quadrates

$$\{(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})\}.$$

Definition 4.39. Die *Quaternionen* $\mathbf{H}$ sind der 4-dimensionale $\mathbf{R}$-Vektorraum mit Basis

$$1, i, j, k.$$

D.h. jedes Element $q \in \mathbf{H}$ schreibt sich also eindeutig als $q = a + bi + cj + dk$ mit $a, \dots, d \in \mathbf{R}$. $\mathbf{H}$ wird mit der eindeutigen $\mathbf{R}$-linearen Multiplikation versehen, die folgende Bedingungen erfüllt

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Das sog. *konjugierte Quaternion* von q ist definiert als $q^* := a - bi - cj - dk$, die *Norm* als

$$||q|| := q^* q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Sei

$$\begin{aligned} Q_8 :=& \{q = a + bi + cj + dk \in \mathbf{H} | a, \dots, d \in \mathbf{Z}, ||q|| = 1\}, \\ =& \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \end{aligned}$$

versehen mit der Multiplikation als Gruppenverknüpfung.

Beide Gruppen fügen sich in eine sog. *kurze exakte Sequenz* ein:

$$1 \to \mathbf{Z}/4 \to Q_8 \xrightarrow{\pi} \mathbf{Z}/2 \to 1, \tag{4.40}$$

$$1 \to \mathbf{Z}/4 \to D_4 \xrightarrow{\pi} \mathbf{Z}/2 \to 1.$$

Hierbei bedeutet die Notation $1 \to H \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} K \to 1$, dass b ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist, a ein injektiver Gruppenhomomorphismus und $\ker b = \operatorname{im} a$ gilt. Außerdem gilt, dass die *Abelianisierung* von Q_8 und D_4 jeweils isomorph zu $\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$ ist. Gemäß Beispiel 1.5 legt dies die 4 ein-dimensionalen Darstellungen beider Gruppen fest. Nach Folgerung 4.21 gilt

$$8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + \sum_{W \in \operatorname{Irrep}(G), \dim W > 1} (\dim W)^2$$

also gibt es für beide Gruppen noch genau eine weitere irreduzible Darstellung von Dimension 2. Man prüft nach (Übungsaufgabe 4.46), *dass die Charaktertafeln beider Gruppen übereinstimmen.* Es besteht jedoch kein Isomorphismus zwischen D_4 und Q_8, denn die obige exakte Sequenz für D_4 *spaltet*, d.h. es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\sigma : \mathbf{Z}/2 \to D_4$ mit der Eigenschaft

$$\pi \circ \sigma = \mathrm{id}.$$

Für Q_8 gibt es hingegen keine solche Spaltung.

4.2 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 4.41. Sei G eine Gruppe. Konstruiere für jede $G \times G$-Darstellung P einen Isomorphismus (von k-Vektorräumen)

$$\operatorname{Hom}_{G \times G}(kG, P) = \operatorname{Hom}_G(1_G, P) = P^G.$$

(Hierbei ist rechts P als G-Darstellung aufgefasst via $g \cdot p := (g, g) \cdot p$.) Diese Tatsache ist ein Spezialfall der sog. 2. Frobenius-Reziprozität.

Gib hiermit einen alternativen Beweis für (4.19) an.

Übungsaufgabe 4.42. Sei G eine Gruppe und $N \subset G$ eine Untergruppe.

Zeige, dass N ein Normalteiler ist (Notation $N \lhd G$) genau dann, wenn N der Kern eines (geeignet gewählten) Gruppenhomomorphismus $G \to U$ mit einer geeignet gewählten Gruppe U ist.

Übungsaufgabe 4.43. Sei G eine Gruppe und $N, P \subset G$ seien Untergruppen, wobei $N \lhd G$ ein Normalteiler ist.. Man sagt, G ist das *halbdirekte Produkt* von N und P, Notation

$$G = N \rtimes P$$

wenn gilt: $G = NP$, d.h. jedes $g \in G$ lässt sich schreiben als $g = np$ mit $n \in N$, $p \in P$ sowie $N \cap P = 1$.

Sei $G = N \rtimes P$. Zeige, dass $G = N \times P$ (direktes Produkt) genau dann, wenn auch P ein Normalteiler in G ist.

Übungsaufgabe 4.44. Die *Diedergruppe* D_n ist definiert als die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks. Zeige, dass sich D_n als halbdirektes Produkt schreiben lässt

$$D_n = R \rtimes P,$$

wobei $R \cong \mathbf{Z}/n$ durch Rotationen um $(360/n)^\circ$ und $P = \mathbf{Z}/2$ durch eine Spiegelung erzeugt wird.

Gib einen Gruppenisomorphismus $D_3 \cong S_3$ an.

Übungsaufgabe 4.45. Eine *kurze exakte Sequenz*

$$1 \to N \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} P \to 1$$

ist eine Folge von Gruppen und Gruppenhomomorphismen mit der Eigenschaft dass b ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist, a ein injektiver Gruppenhomomorphismus und $\ker b = \operatorname{im} a$ gilt. Man sagt auch, dass G eine *Erweiterung* von P durch N ist.

Zeige, dass $G = N \rtimes P$ genau dann, wenn es eine *spaltende exakte Sequenz* gibt, d.h. zusätzlich einen Gruppenhomomorphismus $\sigma : P \to G$ so, dass $b \circ \sigma = \mathrm{id}_P$.

Zeige, dass Sequenz

$$1 \to \mathbf{Z}/m \xrightarrow{a} \mathbf{Z}/(mn) \xrightarrow{b} \mathbf{Z}/n \to 1$$

mit $a([x]) = [nx]$ und $b([y]) = [y]$ exakt ist. Zeige, dass die Sequenz spaltet genau dann, wenn m und n teilerfremd sind.

Übungsaufgabe 4.46. 1. Zeige die kurzen exakten Sequenzen (4.40) und zeige, dass die Sequenz für D_4 spaltet, die für Q_8 jedoch nicht.

Tipp für D_4: bezeichne r die Rotation um 90° und s eine Spiegelung. Zeige dann die Relationen $r^4 = s^2 = e$, $srs = r^{-1}$.

Tipp für Q_8: zeige zunächst $ij = k$ und ähnliche Formeln für ik, jk etc.

2. Zeige z.B. mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen, dass die Charaktertafeln von D_4 und Q_8 übereinstimmen.

3. Zeige, dass D_4 und Q_8 (bis auf Isomorphie) die beiden einzigen nicht-abelschen Gruppen mit 8 Elementen sind.

Übungsaufgabe 4.47. Sei G eine Gruppe. Sei X eine G-Menge, d.h. eine Menge zusammen mit einer Abbildung

$$f : G \times X \to X, (g, x) \mapsto f(g, x) =: g \cdot x$$

mit der Eigenschaft $e_G \cdot x = x$, $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$ für $g, g' \in G$, $x \in X$. Die *Permutationdarstellung* $k[X]$ ist definiert als die Darstellung

$$V := \bigoplus_{x \in X} k.$$

Schreiben wir die Elemente in V als $v = \sum_{x \in X} a_x e_x$, wobei $a_x \in k$ und $e_x = (0, \dots, 1_{\text{an der Stelle } x}, \dots 0)$ der Standardbasisvektor ist. Wir versehen V mit der G-Wirkung $g \cdot (\sum a_x e_x) := \sum a_x e_{g \cdot x}$. (Beispiele dieser Konstruktion traten in Beispiel 1.14 und im Beweis von Theorem 4.15 auf. Außerdem ist auch die reguläre Darstellung eine Permutationsdarstellung).

- Zeige, dass
$$\chi_{k[X]}(g) = \sharp\{x \in X, g \cdot x = x\}.$$
- Konstruiere außerdem einen Isomorphismus von G-Darstellungen, wenn X endlich ist:
$$k[X] \cong (k[X])^*.$$

Übungsaufgabe 4.48. Sei k ein Körper und $\mathbf{P}^1(k)$ die Menge der 1-dimensionalen k-Untervektorräume $\langle x \rangle \subset k^2$. Wir betrachten die folgende Wirkung von $G := \mathrm{GL}_2(k) \in g$:

$$g \cdot \langle x \rangle := \langle gx \rangle,$$

wobei $x \in k^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und gx die Linksmultiplikation bedeutet.

1. Zeige, dass dies eine wohldefinierte Wirkung von G auf $\mathbf{P}^1$ ergibt.

2. Zeige dass die Wirkung eine Bijektion (von G-Mengen)
$$G/B \xrightarrow{\cong} \mathbf{P}^1(k)$$
induziert. (Tipp: zeige die Transitivität und bestimme den Stabilisator eines bequem gewählten Elementes in $\mathbf{P}^1(k)$.)

Übungsaufgabe 4.49. Berechne die Charaktertafel von $G = S_4$ wie folgt:

1. Bestätige, dass es in S_4 genau 5 Konjugationsklassen gibt, wir wählen hierfür die von e (neutrales Element) sowie (12), (12)(34), (123) und (1234).

2. Zeige, dass S_4 (allgemeiner ist dies für S_n gültig) genau zwei 1-dimensionale Darstellungen hat: die triviale Darstellung 1 sowie die Signumsdarstellung σ.

3. S_4 operiert durch Permutationen auf $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Zeige, dass $k[X]$ eine (eindimensionale) triviale Unterdarstellung besitzt und zeige, durch eine Berechnung von $\chi_{k[X]}$ (Übungsaufgabe 4.47), dass es folgende Zerlegung gibt:
$$k[X] = 1 \oplus V.$$
Zeige mittels Satz 4.12, dass V sowie auch $V \otimes \sigma$ irreduzibel sind.

4. Berechne die fünfte und (wieso?) letzte irreduzible S_4-Darstellung R zum einen mittels der Orthogonalitätsrelationen. Zerlege alternativ $V \otimes V$ (durch eine Berechnung von $\chi_{V\otimes V}$ und $\langle V \otimes V, W\rangle$ für die bereits gefundenen irreduziblen Darstellungen W) in irreduzible.

Zur Probe, ob die bisherigen Rechenschritte richtig waren: die Werte bei der Konjugationsklasse $g = (1234)$ sind wie folgt: $\chi_1(g) = 1$, $\chi_\sigma(g) = -1$, $\chi_V(g) = -1$, $\chi_{V\otimes\sigma}(g) = 1$, $\chi_R(g) = 0$.

Übungsaufgabe 4.50. Es sei als bekannt vorausgesetzt, dass die Charaktertafel der alternierenden Gruppe $G := A_4$ (für komplexe Darstellungen) wie folgt gegeben ist, wobei $\omega = e^{2\pi i/3} \in \mathbf{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel ist.

	e	(12)(34)	(123)	(132)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^{-1}
χ_3	1	1	ω^{-1}	ω
χ_4	3	-1	0	0.

Wir bezeichnen mit $W_1, \dots, W_4$ irreduzible Darstellungen, deren Charaktere die $\chi_1, \dots, \chi_4$ sind.

1. Bestimme die Anzahl der Elemente in den Konjugationsklassen der Elemente e, (12)(34), (123), (132). (Kontrolle: 4 kommt 2 mal vor, 3 kommt 1 mal vor).

2. Wir betrachten die Wirkung von G auf der Menge $X := A_4$ die durch die Konjugation gegeben ist. Die assoziierte (12-dimensionale) Permutationsdarstellung $k[X]$ bezeichnen wir im folgenden mit V. Bestimme die Vielfachheiten von W_i $(i = 1, \dots, 4)$ in V mit Hilfe der Charaktertafel.

3. Bestimme die Vielfachheiten von W_i in W_j^* für i, j. (Dies liefert insbesondere ein Beispiel für eine Darstellung, die nicht isomorph zu ihrem Dual ist.)

4. Gib die Vielfachheiten von W_k in $W_i \otimes W_j$ an. (Es wird herauskommen, dass $W_4 \otimes W_4$ *nicht* irreduzibel ist, d.h. Tensorprodukte irreduzibler Darstellungen sind im Allgemeinen nicht irreduzibel.)

Übungsaufgabe 4.51. Sei G eine (nicht notwendig endliche) Gruppe. Zeige, dass $V \otimes W$ irreduzibel ist, wenn V eindimensional und W irreduzibel ist.

Tipp: zu welcher Darstellung ist $V \otimes V^*$ isomorph?

Übungsaufgabe 4.52. Sei $G := (\mathbf{Z}/2)^m$. (Wir schreiben die Elemente von $\mathbf{Z}/2$ als 0 und 1.) Für $v = (v_1, \dots, v_m) \in G$ bezeichne $\alpha(v) := \{i | v_i = 1\}$. Für eine Teilmenge $Y \subset \{1, \dots, m\}$ definieren wir eine Funktion
$$\chi_Y : G \to k, v \mapsto (-1)^{\sharp(\alpha(v)\cap Y)}.$$
Hierbei ist k ein fixierter algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} k \neq 2$.

1. Konstruiere eine Darstellung V_Y von G, deren Charakter gerade die obige Funktion χ_Y ist.

2. Zeige $\operatorname{Irrep}_G = \{V_Y | Y \subset \{1, \dots, m\}\}$.

3. Zeige für Teilmengen $X, Y \subset \{1, \dots, m\}$
$$V_X \otimes V_Y = V_{X \Delta Y},$$
wobei $X \Delta Y := X \cup Y \setminus (X \cap Y)$ die symmetrische Differenz ist.

Übungsaufgabe 4.53. Sei χ_V der Charakter einer nicht-trivialen Darstellung (d.h. es gibt ein $g \in G$, $v \in V$ so dass $gv \neq v$ gilt). Zeige dann
$$\sum_{g \in G} \chi_V(g) = 0.$$

Übungsaufgabe 4.54. Eine Gruppe G operiere auf einer Menge X. In Analogie zur Definition des Tensorprodukts von Darstellungen betrachten wir die G-Operation auf $X \times X$ gegeben durch
$$g \cdot (x_1, x_2) := (gx_1, gx_2).$$
Die Orbits dieser Wirkung auf $X \times X$ heißen *Orbitale*. Beispielsweise ist (wieso?) die Diagonale $\Delta_X := \{(x, x) | x \in X\}$ stets ein Orbital. Die G-Wirkung auf X heißt *2-transitiv*, wenn sie transitiv ist und wenn es neben Δ_X noch genau ein weiteres Orbital gibt.

1. Zeige, dass die G-Wirkung auf X transitiv ist genau dann, wenn es für beliebige Elemente $x \neq y$ und $x' \neq y'$ in X ein $g \in G$ gibt mit $gx = x'$, $gy = y'$.

2. Zeige, dass die Wirkung der symmetrischen Gruppe S_n auf $\{1, \dots, n\}$ 2-transitiv ist.

Übungsaufgabe 4.55. Eine endliche Gruppe G operiere transitiv auf einer Menge X. Sei V ein Komplement der trivialen Unterdarstellung
$$1 \subset k[X]$$
in der Permutationsdarstellung zu X. Zeige, dass V irreduzibel ist genau dann, wenn die G-Wirkung auf X 2-transitiv ist.

Tipp: zeige zunächst $\langle kX, 1 \rangle_G = 1$ (eine explizite Bestimmung von V als Darstellung ist für das Lösen der Aufgabe nicht notwendig).

Übungsaufgabe 4.56. Bestätige die Charaktertafel für A_4 in Übungsaufgabe 4.50.

Tipp: finde eine geeignete Untergruppe $K \subset A_4$ mit $A_4/K \cong \mathbf{Z}/3$ und leite 3 irreduzible 1-dimensionale A_4-Darstellungen her. Zeige, dass die A_4-Wirkung auf $\{1, 2, 3, 4\}$ 2-transitiv ist und verwende Übungsaufgabe 4.55.

Übungsaufgabe 4.57. (Erfordert Grundkenntnisse in algebraischer Topologie.) Zeige, dass die Charaktertheorie folgende Umformulierung hat:
$$K(BG) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^0(\mathrm{Hom}(S^1, BG), \mathbf{C}).$$
Hierbei ist G eine endliche Gruppe, BG der klassifizierende Raum [GJ09, Example I.1.5], $S^1 := \Delta^1/\partial\Delta^1$ die (simpliziale) 1-Sphäre, H^0 bedeutet die 0-te simpliziale Kohomologie und Hom bezeichnet das interne Hom in simplizialen Mengen, siehe [GJ09, §I.5]. Schließlich bezeichnet K die K-Theorie komplexer Vektorbündel.

In dieser Formulierung (als grober Slogan: "K-Theorie eines [geeigneten] Raums ist die Kohomologie seines Schleifenraums") erlaubt die Charaktertheorie weitreichende Verallgemeinerungen, siehe [HKR00].

Übungsaufgabe 4.58. Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Wir bezeichnen mit
$$T^r(V) := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r \text{ Faktoren}}$$
die r-te Tensorpotenz von V.

(i) Die Permutation der r Faktoren liefert eine Wirkung von S_r auf $T^r(V)$. Bezeichne $\mathrm{Sym}^r V := (T^r(V))_{S_r}$ die sog. *symmetrische Potenz*, d.h. die Koinvarianten dieser Wirkung.

Zeige: falls $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist, so ist
$$v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}, \quad i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_r$$
eine Basis von $\mathrm{Sym}^r V$.

(ii) Die S_r-Wirkung auf $\underbrace{V \times \ldots \times V}_{r \text{ Faktoren}}$ gegeben durch

$$\sigma \cdot (v_1, \ldots, v_r) := \operatorname{sgn}(\sigma)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)})$$

induzierte eine Wirkung von S_r auf $T^r(V)$. Wir bezeichnen mit $\bigwedge^r V$ die S_r-Koinvarianten dieser Wirkung. Dies wird als *alternierende Potenz* bezeichnet.

Zeige: falls $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist, so ist

$$v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_r$$

eine Basis von $\mathrm{Sym}^r V$.

Übungsaufgabe 4.59. Sei

$$e_r(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$$

das sog. r-te *elementare symmetrische Polynom* sowie

$$h_r(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_r \le n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$$

das sog. r-te *vollständige symmetrische Polynom*.

Sei nun V ein n-dimensionaler k-Vektorraum sowie $f : V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus mit Eigenwerten

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$$

(ggf. mit Vielfachheiten gezählt). Bezeichne mit $\mathrm{Sym}^r f$ bzw. $\bigwedge^r f$ den durch $f \otimes \ldots \otimes f : T^r(V) \otimes T^r(V)$ induzierten Endomorphismus auf $\mathrm{Sym}^r V$ bzw. $\bigwedge^r V$. Zeige

$$\operatorname{tr}(\mathrm{Sym}^r f) = h_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$
$$\operatorname{tr}(\bigwedge^r f) = e_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

(Die Aussage gilt auch für nicht diagonalisierbare Endomorphismen, wenn man die Eigenwerte gemäß ihrer algebraischen Vielfachheit, d.h. der Nullstellenordnung des charakteristischen Polynoms, zählt.)

Übungsaufgabe 4.60. Sei V eine G-Darstellung mit Charakter $\chi := \chi_V$. Erläutere kurz, dass die symmetrischen und alternierenden Potenzen von V auf natürliche Weise zu einer G-Darstellung werden. Zeige mit Hilfe von Übungsaufgabe 4.59 folgende Formeln für die Charaktere dieser Darstellungen:

$$\chi_{\mathrm{Sym}^2 V}(g) = \frac{\chi(g)^2 + \chi(g^2)}{2}$$
$$\chi_{\bigwedge^2 V}(g) = \frac{\chi(g)^2 - \chi(g^2)}{2}$$
$$\chi_{\mathrm{Sym}^3 V}(g) = \frac{\chi(g)^3 + 3\chi(g^2)\chi(g) + 2\chi(g^3)}{6}$$
$$\chi_{\bigwedge^3 V}(g) = \frac{\chi(g)^3 - 3\chi(g^2)\chi(g) + 2\chi(g^3)}{6}.$$

Übungsaufgabe 4.61. Die Charaktertafel der alternierenden Gruppe A_5 sei als bekannt vorausgesetzt:

	()	(12)(34)	(123)	(12345)	(12354)
V_1	1	1	1	1	1
V_2	4	0	1	-1	-1
V_3	5	1	-1	0	0
V_4	3	-1	0	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$
V_5	3	-1	0	$\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Sei V eine nicht-triviale irreduzible A_5-Darstellung (d.h. $V = V_2, \ldots, V_5$). Zeige mittels der Charaktertafel, dass jede irreduzible A_5-Darstellung W ein Summand von V, $\mathrm{Sym}^2 V$ oder $\mathrm{Sym}^3 V$ ist.

Kapitel 5

Die Fourier-Transformation

Notation 5.1. In diesem Kapitel ist G eine endliche Gruppe und k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char} k \nmid \sharp G$.

In Theorem 4.15 hatten wir einen Isomorphismus von $G \times G$-Darstellungen

$$kG = \bigoplus_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \mathrm{Hom}(W, W) = \bigoplus_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \mathrm{End}(W)$$

gezeigt. Die Charaktertheorie erwuchs letztlich aus der Auswertung dieses Isomorphismus. Sowohl die rechte als auch die linke Seite tragen jedoch noch mehr Struktur, gegeben durch die Multiplikation. Wir führen diese nun ein und zeigen, dass die Fourier-Transformation die Multiplikation auf beiden Seiten bewahrt. Wir werden hierauf nur oberflächlich eingehen (siehe Übungsaufgabe 5.24), es sei jedoch wenigstens bemerkt dass die Fourier-Transformation periodischer Funktionen in der Analysis ein naher Verwandter der Themen in diesem Kapitel ist.

Definition 5.2. Wir machen kG zu einem Ring, dem sog. *Gruppenring* mittels der Multiplikation gegeben durch sog. *Konvolution*, d.h.

$$(f_1 f_2)(g) := \sum_{h \in G} f_1(gh^{-1}) f_2(h). \tag{5.3}$$

Dieser Ring hat (als k-Vektorraum) eine Basis gegeben durch die Funktionen e_g (für $g \in G$) die gegeben sind durch $e_g(h) = 1$ für $h = g$ und 0 sonst. Die Multiplikation in kG erfüllt die Formel

$$e_g e_h = e_{gh}.$$

Für eine endliche Familie $R_1, \dots, R_n$ von Ringen versehen wir

$$\bigoplus_{i=1}^{n} R_i$$

mit der komponentenweisen Multiplikation, d.h.

$$(r_1, \dots, r_n) \cdot (r'_1, \dots, r'_n) := (r_1 r'_1, \dots, r_n r'_n).$$

Dies werden wir im folgenden auf $R_i = \mathrm{End}(W_i)$, Endomorphismenringe von gewissen G-Darstellungen W_i anwenden.

Definition 5.4. Die *Fourier-Transformation* ist die Abbildung

$$\widehat{(-)} : kG \to \bigoplus_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \mathrm{End}(W)$$
$$e_g \mapsto \widehat{e_g} := (g : W \to W)_{W \in \mathrm{Irrep}(G)}.$$

(bzw. deren eindeutige k-lineare Fortsetzung).

Die Fourier-Transformation ordnet einer Funktion $f : G \to k$ also eine Kollektion von Endomorphismen $\mathcal{F}(f)(W) : W \to W$ zu, wobei W die irreduziblen G-Darstellungen durchläuft. Wenn man eine Basis von W wählt, kann man $\mathcal{F}(f)(W)$ auch als $d \times d$-Matrix schreiben, wobei $d := \dim W$.

Beispiel 5.5. Sei $G = \mathbf{Z}/n$ (mit $n > 0$). Wähle eine primitive n-te Einheitswurzel $\zeta \in k$. (Diese Wahl ist beliebig, für $k = \mathbf{C}$ wird in der Literatur üblicherweise $\zeta = e^{2\pi i/n}$ gewählt.) $\mathrm{Irrep}(G)$ besteht gerade aus den folgenden n (1-dimensionalen) Darstellungen, indiziert durch $j \in \mathbf{Z}/n$

$$W_j : G \to \mathrm{GL}(k) = k^\times, g \mapsto \zeta^{jg}$$

(insbesondere $W_j(1) = \zeta^j$). In der Tat, diese sind (da 1-dimensional) irreduzibel, paarweise nicht isomorph (hier wird $\mathrm{char} k \nmid n$ benutzt). Nach Theorem 4.22 sind dies also alle irreduziblen Darstellungen. Die oben angesprochenen Matrizen sind also, da $\dim W_j = 1$, einfach Elemente von k.

Für ein $f \in kG, f = \sum_{g \in \mathbf{Z}/n} f_g e_g$ (mit $f_g \in k$) gilt also

$$\widehat{f}(j) := \widehat{f}(W_j) = \sum_{g \in \mathbf{Z}/n} f_g \zeta^{jg}.$$

Für obige Wahl von ζ im Falle $k = \mathbf{C}$ ergibt sich

$$\widehat{f}(j) = \sum_{g \in \mathbf{Z}/n} f_g \exp^{2\pi i jg/n}. \tag{5.6}$$

Satz 5.7. *Die Fourier-Transformation ist ein Isomorphismus, dessen inverse Abbildung gegeben ist durch*

$$(f_W \in \mathrm{End}(W)) \mapsto \left(g \mapsto \frac{1}{\sharp G} \sum_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \dim W \mathrm{tr} \left(W \stackrel{f_W}{\to} W \stackrel{g^{-1}}{\to} W \right) \right).$$

Bezüglich der Konvolution auf kG und der komponentenweisen Multiplikation auf $\bigoplus_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \mathrm{End}(W)$ ist die Fourier-Transformation überdies ein Ring-*Isomorphismus, d.h. für $f_1, f_2 \in kG$ gilt*

$$\widehat{f_1 \star f_2} = \widehat{f_1} \circ \widehat{f_2}. \tag{5.8}$$

(Hierbei bedeutet $\circ$ die Komposition von Endomorphismen, und $\star$ das Konvolutionsprodukt auf kG, siehe (5.3).)

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es sich um einen Isomorphismus handelt. Offensichtlich ist die Fourier-Transformation k-linear. Da $\dim kG = \sum_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \dim W^2$ gilt, genügt es, die Injektivität zu zeigen. Sei $f \in kG$ im Kern der Abbildung, d.h. f operiert trivial auf jeder irreduziblen G-Darstellung. Nach dem Satz von Maschke operiert es dann trivial auf jeder endlich-dimensionalen Darstellung, insbesondere auf kG, d.h für jedes $h \in kG$ gilt $fh = 0$. Insbesondere, für $h = e_1$, gilt $0 = fe_1 = f$.

Um die Inverse zu bestimmen zeigen wir, dass für beliebiges $x \in G$ die Funktion

$$g \mapsto \frac{1}{\sharp G} \sum_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \dim W \mathrm{tr} \left(W \stackrel{x}{\to} W \stackrel{g^{-1}}{\to} W \right)$$

mit e_x übereinstimmt. In der Tat, es gilt

$$\begin{aligned}
\dim W \mathrm{tr} \left(W \stackrel{x}{\to} W \stackrel{g^{-1}}{\to} W \right) &= \mathrm{tr} \left(W^{\oplus \dim W} \stackrel{g^{-1}x}{\to} W^{\oplus \dim W} \right) \\
&= \mathrm{tr} \left(\mathrm{End}(W) \stackrel{(g^{-1}x, 1)}{\longrightarrow} \mathrm{End}(W) \right) \\
&= \chi_{\mathrm{End}(W)}((g^{-1}x, 1)),
\end{aligned}$$

wobei wir hier $\mathrm{End}(W)$ als $G \times G$-Darstellung auffassen. Aus dem Satz von Peter-Weyl und der Bestimmung des Charakters von kG (mittels Übungsaufgabe 4.47) folgt dann

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sharp G} \sum_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \dim W \mathrm{tr} \left(W \stackrel{x}{\to} W \stackrel{g^{-1}}{\to} W \right) &= \frac{1}{\sharp G} \chi_{kG}((g^{-1}x, 1)) \\
&= \delta_{gx}.
\end{aligned}$$

Um (5.8) zu sehen, reicht es, zwei Basisvektoren e_x und e_y für $x, y \in G$ zu betrachten. Es gilt nach Definition

$$e_x \star e_y = e_{xy}.$$

Andererseits ist $\widehat{e_{xy}}(W)$ gerade $xy : W \to W$, dies ist nach Definition einer Darstellung die Komposition $W \stackrel{x}{\to} W \stackrel{y}{\to} W$, welches die Auswertung an W von $\widehat{e_x} \circ \widehat{e_y}$ ist. □

Bemerkung 5.9. Der obige Isomorphismus von Ringen ist auch ein Spezialfall vom *Satz von Artin-Wedderburn*: der Satz von Maschke besagt, dass kG ein sog. *halbeinfacher Ring* ist und Artin-Wedderburn klassifiziert halbeinfache Ringe über algebraisch abgeschlossenen Körpern als Produkte von Matrizenalgebren.

Der obige Satz liefert einen erneuten Beweis für Theorem 4.22:

Folgerung 5.10. *Die Anzahl der irreduziblen G-Darstellungen ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen in G.*

Beweis. Ein Isomorphismus von Ringen liefert einen Isomorphismus der Zentren. Wir erhalten also

$$Z(kG) = Z(\bigoplus_W \mathrm{End}(W)). \tag{5.11}$$

Nach Übungsaufgabe 5.17 besteht $Z(kG)$ gerade aus den Klassenfunktionen, diese sind nach Definition auf den Konjugationsklassen konstant, d.h. $\dim_k Z(kG)$ ist die Anzahl der Konjugationsklassen.

Man prüft sofort nach, dass $Z(\bigoplus R_i) = Z(R_1) \times \dots Z(R_n)$ für beliebige Ringe $R_1, \dots, R_n$. Schließlich ist $k \cdot \mathrm{id}_W \subset Z(\mathrm{End}(W)) \subset \mathrm{End}_G(W) = k$ (nach Schurs Lemma, da W irreduzibel!). $\square$

Wir erhalten hieraus eine Verschärfung von Folgerung 2.4:

Folgerung 5.12. *Eine endliche Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn ihre irreduziblen Darstellungen (über einem Körper mit $\operatorname{char} k \nmid \sharp G$, k algebraisch abgeschlossen) alle ein-dimensional sind.*

Beweis. G ist genau dann abelsch, wenn kG ein kommutativer Ring ist (folgt sofort aus $e_g e_h = e_{gh}$), d.h. genau dann, wenn $kG = Z(kG)$. Nach dem obigen Isomorphismus ist dies äquivalent zu $Z(\mathrm{End}(W)) = \mathrm{End}(W)$ für alle irreduziblen G-Darstellungen. Da aber $Z(\mathrm{End}(W))$ (wie oben gesehen) stets 1-dimensional ist, ist dies wiederum äquivalent zu $\dim \mathrm{End} W = (\dim W)^2 = 1$ für alle W. $\square$

Folgerung 5.13. *Sei G eine endliche Gruppe und k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} k = 0$. Dann liefert die Abbildung $V \mapsto \chi_V$ einen Ring-Isomorphismus*

$$R(G) \otimes_{\mathbf{Z}} k \to Z(kG) = \bigoplus_{C \subset G \, Konjugationsklasse} k.$$

Beweis. Laut Lemma 4.8 ist es ein Ring-Homomorphismus. Beide Ringe sind als k-Vektorräume endlichdimensional und von der gleichen Dimension (Theorem 4.22), es reicht also die *lineare Unabhängigkeit von Charakteren* zu zeigen, d.h. zu zeigen, dass für $\sum_{W \in \mathrm{Irrep}_G} a_W \chi_W = 0$ mit gewissen $a_W \in k$ schon $a_W = 0$ folgt.

Betrachte hierzu das Element $\sum_W \frac{a_W}{\dim W} \mathrm{id}_W \in \bigoplus_W \mathrm{End}(W)$. Die inverse Fourier-Transformation bildet dieses Element auf die Funktion

$$g \mapsto \frac{1}{\sharp G} \sum_W a_W \chi_W(g^{-1}) \in Z(kG)$$

ab, welches nach Voraussetzung verschwindet. Da die inverse Fourier-Transformation insbesondere injektiv ist, folgt $a_W = 0$ für alle W. $\square$

Satz 5.14. *Sei G abelsch.*

1. *Die Menge Irrep_G, versehen mit dem Tensorprodukt von Darstellungen, trägt dann die Struktur einer abelschen Gruppe. Sie wird als die* duale Gruppe *bezeichnet, Notation $\widehat{G}$.*

2. *Es besteht ein Isomorphismus abelscher Gruppen*

$$\widehat{G} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{Gr}(G, k^\times)$$
$$V \mapsto \chi_V.$$

Hierbei steht rechts die Menge der Gruppenhomomorphismen, versehen mit der punktweisen Multiplikation (gegeben durch die Multiplikation in $k^\times$).

3. *Es besteht ein* nicht-kanonischer *Isomorphismus*

$$G \cong \widehat{G}.$$

4. *Es besteht ein kanonischer Isomorphismus*

$$G \xrightarrow{\cong} \widehat{\widehat{G}}.$$

Beweis. Die Darstellungen in Irrep_G sind 1-dimensional, da G abelsch ist und damit bewahrt $\otimes$ irreduzible Darstellungen (Übungsaufgabe 4.51). Die triviale Darstellung 1 ist das neutrale Element in Irrep_G und das Inverse (bezüglich der Operation $\otimes$) ist gerade die duale Darstellung.

Der Charakter einer 1-dimensionalen Darstellung V ist ein Gruppenhomomorphismus $G \to k^\times$. Die Abbildung ist injektiv, da der Charakter χ_V die Darstellung V bis auf Isomorphismus festlegt (Folgerung 4.11). Die Abbildung ist bijektiv, denn die Kardinalitäten beider Gruppen sind gleich: es gibt einen Isomorphismus $G = \mathbf{Z}/n_1 \times \dots \mathbf{Z}/n_k$ und, da beide Seiten mit Produkten (in G) vertauschen, genügt es $G = \mathbf{Z}/n$ zu betrachten. Dann ist $n = \sharp\widehat{G}$ sowie auch $\sharp\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(\mathbf{Z}/n, k^\times) = \sharp\{\zeta \in k^\times, \zeta^n = 1\} = n$. (Hierbei verwenden wir $k = \overline{k}$ und $\mathrm{char} k \nmid n$.) Außerdem gilt $\chi_{V\otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g)$, d.h. obige Abbildung ist in der Tat ein Gruppenisomorphismus.

Wir konstruieren einen Isomorphismus $G \cong \widehat{G}$ wie folgt: sei $G = \mathbf{Z}/n_1 \times \dots \times \mathbf{Z}/n_k$. Es genügt den Fall $k = 1$, d.h. $G = \mathbf{Z}/n$ zu betrachten. Wähle eine n-te primitive Einheitswurzel $\zeta \in k^\times$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}/n &\longrightarrow \widehat{\mathbf{Z}/n} \\ k &\mapsto (g \mapsto \zeta^{kg}) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Wir konstruieren einen Gruppenhomomorphismus $G \xrightarrow{\cong} \widehat{(\widehat{G})}$ mittels der vorigen Beschreibung von $\hat{G}$:

$$g \mapsto (\phi_g : \hat{G} \to k^\times, (f : G \to k^\times) \mapsto f(g))$$

Diese natürliche Abbildung ist mit einer Zerlegung $G = \mathbf{Z}/n_1 \times \dots \mathbf{Z}/n_k$ kompatibel, wir dürfen also $G = \mathbf{Z}/n$ annehmen. Da beide endlichen Gruppen nach dem vorigen Schritt n Elemente haben, genügt es, die Injektivität zu zeigen. Sei $g \in \mathbf{Z}/n$, $g \neq 0$. Betrachte $f \in \widehat{\mathbf{Z}/n}$, $f(k) = \zeta^k$ für eine primitive n-te Einheitswurzel ζ. Dann ist $f(k) = 1$ nur für $k = 0$ in $\mathbf{Z}/n$. Also ist $f(g) \neq 1$, d.h. $\phi_g \neq 1$, d.h. die Abbildung ist injektiv. □

Bemerkung 5.15. Die Situation mit dem kanonischen Isomorphismus $G \cong \widehat{\widehat{G}}$ vs. dem nicht-kanonischen Isomorphismus $G \cong \widehat{G}$ ist ganz ähnlich zur linearen Algebra: für einen endlich-dimensionalen k-Vektorraum V gibt es einen kanonischen (d.h. funktoriellen) Isomorphismus zum Bidualraum

$$V \xrightarrow{\cong} V^{**}, v \mapsto (V^* \to k, f \mapsto f(v)).$$

Es gibt, da die Dimensionen übereinstimmen, auch Isomorphismen

$$V \cong V^*,$$

diese sind jedoch von der Wahl von Basen in V und V^* abhängig und damit nicht kanonisch. Die Wahl der Einheitswurzel ζ, die den Isomorphismus $G \cong \widehat{G}$ nicht kanonisch macht, entspricht in dieser Analogie der Wahl der Basen.

Außerdem erhalten wir hieraus ein konzeptionelleres Verständnis der Charaktertafel. Wir verfügen nämlich über zwei Basen von $Z(kG)$:

- Die Basis $b_C := \frac{1}{|C|}\sum_{g\in C} e_g$, wobei $C \subset G$ die Konjugationsklassen von G durchläuft. (Der Vorfaktor $|C|^{-1}$ wird gleich nützlich werden, ist aber an sich irrelevant.)

- Die Basis $\{\delta_W\}_{W\in\mathrm{Irrep}(G)}$, so dass unter dem obigen Isomorphismus (5.11) δ_W zu $(0, \dots, (\dim W)^{-1} \cdot \mathrm{id}_W, 0, \dots)$ korrespondiert. (Auch hier ist der Vorfaktor gleich bequem.)

Satz 5.16. *Die Charaktertafel von G ist gerade die Basiswechselmatrix der Basen $\{b_C\}$ und $\{\delta_W\}$.*

Beweis. Sei $C \subset G$ eine Konjugationsklasse. Wir schreiben b_C als Linearkombination der δ_W. Unter dem obigen Isomorphismus (5.11) gilt

$$b_C \mapsto \left(\frac{1}{|C|}\sum_{g\in C} g : W \to W\right)_{W\in\mathrm{Irrep}(G)}.$$

Es gilt $b_C \in Z(kG)$. Da die Fourier-Transformation ein *Ring*-Isomorphismus ist, liegt der rechte Term also in $\prod Z(\mathrm{End}(W))$. Es gilt $Z(\mathrm{End}(W)) \subset \mathrm{End}_G(W)$ und nach Schurs Lemma (Folgerung 2.3) operiert $\sum_{g\in G} g$

demnach auf jedem W als $\lambda_W \mathrm{id}_W$ für ein gewisses $\lambda_W \in k$; daher erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(\sum_{g \in C}(g : W \to W)\right)_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} &= (\lambda_w \mathrm{id}_W)_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \\ &= \left((\dim W)^{-1}\mathrm{tr}(\sum_{g\in C} g : W \to W)\mathrm{id}_W\right)_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \\ &= \left(\frac{|C|}{\dim W}\mathrm{tr}(g_0 : W \to W)\mathrm{id}_W\right)_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \\ &= \sum_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \chi_W(g)\delta_W.\end{aligned}$$

Hierbei ist $g_0 \in C$ ein beliebiges Element und die dritte Gleichheit gilt da $\mathrm{tr}(g) = \mathrm{tr}(xgx^{-1})$ für $g, x \in G$ ist. □

5.1 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 5.17. Für einen Ring R ist das *Zentrum* $Z(R)$ definiert als

$$Z(R) := \{r \in R, rs = sr \quad \text{für alle } s \in R\}.$$

Zeige, dass das Zentrum $Z(kG)$ des Gruppenrings gerade aus den *Klassenfunktionen* besteht, d.h. den $f : G \to k$, die

$$f(ghg^{-1}) = f(h)$$

für alle $g, h \in G$ erfüllen.

Übungsaufgabe 5.18. Beschreibe die inverse Fourier-Transformation explizit im Fall $G = \mathbf{Z}/n$, $k = \mathbf{C}$ und der Wahl der irreduziblen G-Darstellungen wie in Beispiel 5.5.

Übungsaufgabe 5.19. (Anwendung der Fourier-Transformation auf Lösungen kubischer Gleichungen)

Die Fourier-Transformation lässt sich nutzen, um die seit Cardano (16. Jahrhundert) bekannten Lösungsformeln für Polynome niedrigen Grades (≤ 4) zu finden. Ziel dieser Übungsaufgabe ist es, dies für kubische Gleichungen

$$t^3 + bt^2 + ct + d = 0$$

durchzuführen. Die folgende Anleitung geht auf Lagrange (um 1770) zurück, der mit diesem konzeptionelleren Verständnis der Reduktion einer kubischen Gleichung auf eine quadratische Gleichung der Wegbereiter zur Galois-Theorie war.

Wir suchen $x_0, x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ mit

$$t^3 + bt^2 + ct + d = (t - x_0)(t - x_1)(t - x_2). \tag{5.20}$$

1. Wir fassen $x \in \mathbf{C}^3$ als Element in $\mathbf{C}[\mathbf{Z}/3]$ auf. Sei $y = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbf{C}^3$ derart, dass

   $$y^\wedge = x.$$

   Bestimme explizit die x_i in Termen der y_i.

2. Setze für die x_i in (5.20) die gefundenen Ausdrücke in Termen der y_i ein.

3. Führe einen Koeffizientenvergleich in (5.20) für die verschiedenen Potenzen von t durch.

4. Stelle $(y_1y_2)^3$ sowie $y_1^3 + y_2^3$ in Termen von $a, \dots, d$ dar.

   Zur Probe: es ergibt sich $(y_1y_2)^3 = \left(\frac{b^2}{9} - \frac{c}{3}\right)^3$.

5. Stelle y_1^3 und analog y_2^3 in Termen von $(y_1^3 + y_2^3)$ und $(y_1y_2)^3$ dar. (Dieser Schritt ist unabhängig von den vorigen. Er realisiert die o.g. Reduktion auf eine *quadratische* Gleichung).

6. Bestimme y_1 und y_2 in Termen von $a, \dots, d$ und berechne schließlich mittels der inversen Fourier-Transformation (Übungsaufgabe 5.18) die x_0, x_1, x_2 in Termen von $a, \dots, d$.

Übungsaufgabe 5.21. Zeige, dass die Fourier-Transformation

$$kG \to \bigoplus_{W \in \mathrm{Irrep}_G} \mathrm{End}(W)$$

ein Isomorphismus von $G \times G$-Darstellungen ist. (Wie zuvor ist die $G \times G$-Wirkung auf kG gegeben durch die $G \times G$-Wirkung auf G gegeben durch $(g,h) \cdot x := gxh^{-1}$ für $g, h, x \in G$; die $\mathrm{End}(W)$ werden zur $G \times G$-Darstellung wie in Definition 3.4.)

Übungsaufgabe 5.22. Zur Erinnerung: das *Spektrum* eines kommutativen Rings R besteht aus seinen Primidealen.

1. Zeige dass $\mathrm{Spec}(k^n)$ aus genau n Elementen besteht. (Hierbei ist k^n versehen mit der koordinatenweisen Addition und Multiplikation.)

2. Sei k algebraisch abgeschlossen, $\mathrm{char} k \nmid \sharp G$. Gib eine Bijektion

$$\mathrm{Irrep}(G) \to \mathrm{Spec}(Z(kG)) \tag{5.23}$$

an. Hierbei ist $Z(kG)$ das Zentrum des Gruppenrings.

Diese Interpretation zeigt die Bedeutung von $Z(kG)$. In anderen Gebieten der Darstellungstheorie ist dies ebenso wichtig: Darstellungen von Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ sind Moduln über der sog. einhüllenden Algebra $U(\mathfrak{g})$. Für eine halbeinfache Lie-Algebra, wie z.B. $\mathfrak{gl}_n$, regiert das Zentrum $Z(U(\mathfrak{g}))$ die Darstellungstheorie von $\mathfrak{g}$ auf weitreichende Weise, siehe z.B. [Hum08, Proposition 1.12].

Übungsaufgabe 5.24. Sei $k = \mathbf{C}$. Zeige, dass die duale Gruppe $\mathrm{Irrep}_G(\mathbf{C}) = \widehat{G}$ isomorph zur Gruppe der Gruppenhomomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(G, S^1)$$

ist. Hierbei ist $S^1 = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ die 1-Sphäre, versehen mit der Multiplikation als Gruppenstruktur.

In dieser Formulierung erlaubt die obige Dualität eine weitreichende Verallgemeinerung zur sog. *Pontryagin-Dualität*. Diese besagt: der Funktor

$$G \mapsto \widehat{G} := \{\text{stetige Gruppenhomomorphismen } G \to S^1\}$$

liefert eine Dualität auf der Kategorie der lokal kompakten abelschen Gruppen. Unter dieser Äquivalenz korrespondieren kompakte Gruppen zu diskreten Gruppen und umgekehrt. Der Fall der endlichen (=kompakte, diskrete) Gruppen, den wir betrachtet haben, ist gerade der einfachste Spezialfall hiervon.

Gib Isomorphismen wie folgt an:

- $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ (diese Tatsache ist die Grundlage der Fourier-Transformation reeller Funktionen)
- $\widehat{S^1} = \mathbf{Z}$,
- $\widehat{\mathbf{Z}} = S^1$.

Übungsaufgabe 5.25. (*Lemma von Artin, Lineare Unabhängigkeit von Charakteren*) Sei G eine endliche Gruppe, $\chi_1, \ldots, \chi_n : G \to k^\times$ die Charaktere paarweise verschiedener eindimensionaler G-Darstellungen. Seien $a_1, \ldots, a_n \in k$. Zeige, dass

$$a_1\chi_1 + \cdots + a_n\chi_n = 0$$

genau dann gilt, wenn alle $a_i = 0$.

Kapitel 6

Ein Hauch von modularer Darstellungstheorie

Die Generalvoraussetzung $\operatorname{char} k \nmid \sharp G$, die wir oben stets getroffen haben, ist eine sehr wesentliche Bedingung. Wenn sie nicht erfüllt ist, d.h. wenn

$$\operatorname{char} k | \sharp G$$

gilt, spricht man von sog. *modularer Darstellungstheorie*. Sie ist grundlegend anders als die Darstellungstheorie im Fall $\operatorname{char} k \nmid \sharp G$. Überdies ist sie *weitaus* weniger gut verstanden, so kennen wir zwar nach Theorem 6.4 die Anzahl der irreduziblen modularen S_n-Darstellungen, wissen jedoch bis auf wenige Ausnahmen nicht einmal, welche Dimension sie haben!

Es sei daran erinnert, dass eine (endliche) *p-Gruppe* G eine Gruppe ist mit der Eigenschaft, dass $\sharp G = p^n$ ist. (Nach den Sylowsätzen ist dies äquivalent dazu, dass die Ordnung aller $g \in G$ eine p-Potenz ist. Wir benötigen dies jedoch nicht.) Beispielsweise ist die *Heisenberg-Gruppe*

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_q)$$

(d.h. $a, b, c \in \mathbf{F}_q$ sind beliebig) eine p-Gruppe, wobei $q = p^n$.

Theorem 6.1. *Sei G eine p-Gruppe sowie k ein Körper der Charakteristik p. Die einzige (!) irreduzible G-Darstellung über k ist die triviale Darstellung 1.*

Wir beweisen dies mit Hilfe des folgenden Lemmas:

Lemma 6.2. *Eine p-Gruppe G operiere auf einer endlichen Menge X. Sei X^G die Menge der Fixpunkte. Dann gilt*

$$\sharp X \equiv \sharp(X^G) \mod p.$$

Beweis. Das Komplement $X \setminus X^G$ ist disjunkte Vereinigung nicht-trivialer G-Orbits $G \cdot x$. Jedes solche Orbit ist bijektiv zu $G/\operatorname{Stab}_G x$, insbesondere gilt $\sharp(Gx) = p^{n_x}$ mit $n_x \geq 1$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Das obige Theorem folgt direkt aus:

Satz 6.3. *Sei $V \neq 0$ ein k-Vektorraum, $\operatorname{char} k = p$ und $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung einer p-Gruppe. Dann gibt es ein $v \in V \setminus \{0\}$, welches von allen $g \in G$ festgehalten wird, d.h. $gx = x$.*

Beweis. Sei $x \in V \setminus \{0\}$ beliebig. Betrachte den $\mathbf{F}_p$-Untervektorraum $X \subset V$, die von den gx, $g \in G$ erzeugt wird. Es gilt $\sharp X = p^n$, nach dem Lemma also $p | \sharp(X^G)$. Insbesondere gilt $X^G \neq \{0\}$, d.h. wir erhalten v wie behauptet. □

Theorem 6.1 (und auch Theorem 4.22) ist ein Spezialfall des folgenden Satzes, den wir nicht beweisen oder benutzen werden:

Theorem 6.4. *(*Satz von Brauer*) Sei k algebraisch abgeschlossen und $p := \operatorname{char} k > 0$. (Der Fall $\operatorname{char} k | \sharp G$ ist zugelassen.) Dann gibt es genau so viele irreduzible G-Darstellungen (über k) wie p-*reguläre Konjugationsklassen*, d.h. Konjugationsklassen von Elementen $g \in G$ deren Ordnung prim zu p ist.*

Der folgende Satz von Jordan-Hölder beschreibt, wie (endlich-dimensionale) Darstellungen sich aus irreduziblen Darstellungen erhalten lassen:

Satz 6.5. *(*Satz von Jordan-Hölder*) Sei G eine (nicht notwendig endliche) Gruppe und V eine endlich-dimensionale G-Darstellung. Dann gibt es eine Kette von Unterdarstellungen*

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V \tag{6.6}$$

so, dass alle V_i/V_{i-1} irreduzibel sind. Eine Kette mit dieser Eigenschaft nennt man auch Kompositionsreihe. *Für eine andere Kompositionsreihe*

$$0 = V'_0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_m = V$$

gilt $m = n$ und es gibt eine Bijektion $\sigma \in S_n$ und Isomorphismen von G-Darstellungen $V_i/V_{i-1} \cong V'_{\sigma(i)}/V'_{\sigma(i)-1}$.

Beweis. (nach [Bau06]) Zur Existenz einer solchen Kette: wenn V_i bereits konstruiert ist, wähle $V_{i+1} \supsetneq V_i$ minimal so, dass V_{i+1}/V_i irreduzibel ist. Da alle auftretenden Darstellungen als k-Vektorräume endlich-dimensional sind, ist dies möglich. Die Konstruktion endet wiederum aus Dimensionsgründen.

Sei V'_i wie oben eine weitere Kompositionsreihe. Wir nutzen im Beweis folgende Notation (die aus der Gruppentheorie inspiriert ist): für eine Darstellung Z und zwei Unterdarstellungen $X, Y \subset Z$ bezeichnen wir kurz mit XY die Summe der beiden Darstellungen, d.h. das Bild der Abbildung (von G-Darstellungen)

$$X \oplus Y \to Z.$$

Seien nun zwei Kompositionsreihen wie oben gegeben. Wir bezeichnen mit $W_{ij} := V_i \cap V'_j$ den Schnitt der Darstellungen. Wir schneiden jede Darstellung in

$$0 = V'_0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_m = V$$

mit V_i und erhalten eine Kette von Unterdarstellungen von V_i der Länge m:

$$0 = W_{i0} \subset \cdots \subset W_{im} = V_i.$$

Bilden wir die Summe dieser Kette mit V_{i-1} (für $i \geq 2$) erhalten wir eine Kette

$$V_{i-1} = W_{i0}V_{i-1} \subset W_{i1}V_{i-1} \subset \cdots \subset W_{im}V_{i-1} = V_i.$$

Da die V_i eine Kompositionsreihe bilden ist an genau einer Stelle in dieser Reihe $\subsetneq$, ansonsten gilt überall Gleichheit. Dies führen wir für jedes i durch und erhalten eine Kette von Unterdarstellungen der Länge nm:

$$\begin{aligned} 0 &= W_{10}V_0 \subset W_{11}V_0 \subset \cdots \subset W_{1m}V_0 = V_1 \\ &= W_{20}V_1 \subset W_{21}V_1 \subset \cdots \subset W_{2m}V_1 = V_2 \\ &= W_{30}V_2 \subset \cdots \subset W_{nm}V_n = V_n = V. \end{aligned}$$

Analog können wir, indem wir die Rollen der V_* und V'_* vertauschen, eine Kette

$$0 = W_{01}V'_0 \subset W_{11}V'_0 \subset \ldots W_{nm}V'_m = V$$

konstruieren. Die Quotientendarstellungen in dieser Kette sind, nach Konstruktion und obiger Bemerkung, genau die Quotientendarstellungen die auch in der Kette (V_i) auftauchen.

Wir behaupten nun, dass die jeweiligen Quotientendarstellungen isomorph sind, hieraus folgt die Behauptung:

$$\underbrace{W_{ij}V'_{j-1}}_{QN'} / \underbrace{W_{i-1,j}}_{L'}\underbrace{V'_{j-1}}_{N'} \xleftarrow{\cong} \underbrace{W_{ij}}_{Q} / \underbrace{W_{i,j-1}}_{Q\cap N'}\underbrace{W_{i-1,j}}_{L'} = \underbrace{W_{ij}}_{Q} / \underbrace{W_{i,j-1}}_{L}\underbrace{W_{i-1,j}}_{Q\cap N} \xrightarrow{\cong} \underbrace{W_{ij}V_{i-1}}_{QN} / \underbrace{W_{i,j-1}}_{L}\underbrace{V_{i-1}}_{N}.$$

Wir wenden das folgende Lemma auf Q, N, L bzw. Q, N', L' an und erhalten die beiden Isomorphismen rechts und links. □

Lemma 6.7. *Seien Q, N, L Unterdarstellungen einer gegebenen Darstellung V mit $L \subset Q$. Dann induziert die Abbildung*

$$q \mapsto \overline{q} := q + LN$$

einen Isomorphismus von G-Darstellungen

$$Q/L(Q \cap N) \xrightarrow{\cong} QN/LN.$$

(Hierbei ist, wie oben im Beweis LN die Summe der Unterdarstellungen L und N innerhalb von V.)

Beweis. Die Abbildung $Q \to QN/LN$, $q \mapsto \overline{q} := q + LN$ ist surjektiv. Sei K ihr Kern. Wir müssen zeigen:

$$K = L(Q \cap N).$$

"$\subset$": sei $x \in K$, d.h. $x \in Q$ und $x \in LN$, d.h. $x = l + n$ mit $l \in L$, $n \in N$. Da $L \subset Q$ gilt also $n \in Q$, d.h. $n \in Q \cap N$. Also ist $x \in L(Q \cap N)$.

"$\supset$": sei $x = l + c$ mit $l \in L$ und $c \in Q \cap N$. Dann ist $x \in Q$ und $\overline{x} = \overline{lc} = l + c + LN = LN$, d.h. $x \in K$.

Alternativ kann man auch das 9-er Lemma anwenden:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L \cap N \arrow[r] \arrow[d] & Q \cap N \arrow[r] \arrow[d] & Q \cap N/L \cap N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \oplus N \arrow[r] \arrow[d] & Q \oplus N \arrow[r] \arrow[d] & Q/L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & LN \arrow[r] \arrow[d] & QN \arrow[r] \arrow[d] & QN/LN \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Die Zeilen sind exakt nach Definition, die ersten beiden Spalten ebenfalls nach Definition. Also ist auch die 3. Spalte exakt, d.h. $QN/LN = (Q/L)(Q \cap N)(L \cap N) = Q/L(Q \cap N)$. $\square$

Folgerung 6.8. *Sei G eine (nicht notwendig endliche) Gruppe und k ein beliebiger Körper. Es besteht ein Isomorphismus (von abelschen Gruppen)*

$$\bigoplus_{V \in \mathrm{Irrep}_G(k)} \mathbf{Z} \xrightarrow{\cong} R(G)$$
$$e_V \mapsto [V].$$

Beweis. Eine Abbildung in umgekehrter Richtung ist wie folgt gegeben: seien V und V' endlich-dimensionale Darstellungen. Wähle eine Kompositionsreihe $0 = V_0 \subset \cdots \subset V_n = V$ und analog für V'. Zähle, für jedes $W \in \mathrm{Irrep}_G$, die Anzahl n_W der Quotienten V_i/V_{i-1}, die isomorph zu W sind und analog die Anzahl n'_W für V'. Die Zahlen n_W und n'_W sind nach Satz 6.5 wohldefiniert. Bilde dann $[V] - [V']$ auf den Vektor $(n_W)_{W \in \mathrm{Irrep}_G}$ ab. Man prüft leicht nach, dass beide Kompositionen die jeweiligen Identitäten sind. $\square$

Für eine p-Gruppe erhalten wir folgende Gegenüberstellung von Darstellungen über k:

$\mathrm{char} k \neq p$	$\mathrm{char} k = p$
vollständige Reduzibilität	Unipotenz
irreduzible Darstellungen interessant	irreduzible Darstellungen trivial
Erweiterungen trivial	Erweiterungen interessant.

Wir können dies auch in Termen von Matrizen formulieren. Sei also V eine G-Darstellung für eine p-Gruppe G. Im Fall $\mathrm{char} k \neq p$ gilt

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} V^{(i)}$$

für gewisse irreduzible Darstellungen $V^{(i)}$. Wählen wir Basen $(v_1^{(i)}, \dots, v_{n^{(i)}}^{(i)})$ von $V^{(i)}$, so können wir die Wirkung von $g \in G$ auf V ausdrücken als Blockmatrix:

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} & & & \\ & A^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A^{(n)} \end{pmatrix},$$

wobei die $A^{(i)}$ gewisse $n^{(i)} \times n^{(i)}$-Matrizen sind, die die Wirkung von g auf $V^{(i)}$ beschreiben, d.h. die Einträge $A_{jk}^{(i)}$ ist bestimmt durch $gv_j^{(i)} = \sum_{k=1}^{n^{(i)}} A_{jk}^{(i)} v_k^{(i)}$. Wenn andererseits $\mathrm{char} k = p$ ist, finden wir nach dem Satz 6.5

eine Kette von Unterdarstellungen $V^{(i)}$ wie in (6.6) so dass $V^{(i)}/V^{(i-1)}$ irreduzibel und damit nach Theorem 6.1 die triviale (1-dimensionale) Darstellung ist. Wir können also induktiv Vektoren $v^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ in V wählen, so dass $v^{(1)}, \dots, v^{(i)}$ eine Basis von $V^{(i)}$ ist. Dann schreibt sich die Wirkung von $g \in G$ als Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Die a_{ij} sind hierbei (eindeutig durch g und die obige Basis festgelegte) Elemente in k, sie beschreiben die Erweiterungen von G-Darstellungen

$$0 \to V^{(i-1)} \to V^{(i)} \xrightarrow{\pi} 1 \to 0$$

denn $gv^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v^{(j)}$. Die Koeffizienten a_{ij} für $i > j$ verschwinden, da nach Konstruktion $gv^{(i)} \in V^{(i)} = \langle v^{(1)}, \dots, v^{(i)} \rangle$ ist. Außerdem ist $a_{ii} = 1$, da in der obigen exakten Sequenz $gv^{(i)}$ auf $g\pi(v^{(i)}) = \pi(v^{(i)})$ abgebildet wird.

6.1 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 6.9. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char} k = p = 2$.

1. Zeige, dass S_3 genau eine eindimensionale irreduzible Darstellung hat. Zeige außerdem, dass S_3 eine zweidimensionale irreduzible Darstellung hat.

2. Folgere mittels Theorem 6.4, dass es sich um eine vollständige Liste der irreduziblen S_3-Darstellungen handelt.

Übungsaufgabe 6.10. Sei $k = \mathbf{F}_q$ ein endlicher Körper der Charakteristik p, d.h. $q = p^n$. Sei

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 1 \end{pmatrix}, * \in k \right\} \subset \mathrm{GL}_n(k)$$

die Untergruppe der *unipotenten* $n \times n$-Matrizen. Wir machen $V = k^n$ zu einer G-Darstellung via

$$U \subset \mathrm{GL}_n(k) = \mathrm{GL}(V).$$

Bestimme eine Kompositionsreihe $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_m = V$ dieser U-Darstellung V. Ist V isomorph (als U-Darstellung) zur direkten Summe $\bigoplus_{i=1}^{m} V_i/V_{i-1}$?

Kapitel 7

Mackey-Theorie

Notation 7.1. In diesem Abschnitt seien G, H beliebige Gruppen und k ein beliebgier Körper.

Kurz gesagt befasst sich die Mackey-Theorie mit der Frage, wie Darstellungen einer Gruppe Anlass zu Darstellungen anderer Gruppen geben und inwieweit unter diesen Bildungen irreduzible Darstellungen bewahrt bleiben. Die einfachste derartige Konstruktion ist die Restriktion, der wir bereits begegnet sind: das äußere Tensorprodukt $V \boxtimes W$ zweier G-Darstellungen V und W ist eine $G \times G$-Darstellung. Betrachten wir nur die Wirkung der Untergruppe $G \cong \Delta_G := \{(g, g) | g \in G\}$, so erhalten wir $V \otimes W$. Die Induktion liefert umgekehrt für eine H-Darstellung und eine Übergruppe $G \supset H$ eine G-Darstellung.

7.1 G-Mengen

Um all die o.g. Begriffe bequem handhaben zu können, beginnen wir mit einigen Bemerkungen über G-Mengen.

Definition 7.2. Eine *G-Menge* ist eine Menge X zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\pi : G \to \operatorname{Aut}(X)$. Wir schreiben wie üblich $g{\cdot}x$ oder gx für $\pi(g)(x)$. Eine G-äquivariante Abbildung ist eine Abbildung von Mengen $f : X \to Y$ so dass $f(gx) = gf(x)$ gilt. Wir schreiben $\operatorname{Hom}_G(X, Y)$ für die Menge dieser Abbildungen. Ein G-äquivarianter Isomorphismus ist eine bijektive G-äquivariante Abbildung.

Man beachte die Ähnlichkeit dieser Definition zu Definition 1.2: wir haben lediglich die Worte "Vektorraum" und "lineare Abbildung" durch "Menge" und "Abbildung von Mengen" ersetzt. Auch die folgenden Resultate kann man als (erheblich einfachere) Varianten der Aussagen in den bisherigen Kapiteln sehen: (i) entspricht dem Satz von Maschke (Theorem 1.17), (v) ist ein Analogon von Schurs Lemma.

Satz 7.3. *Seien $H, K \subset G$ Untergruppen und X eine G-Menge.*

(i) Es besteht ein Isomorphismus von G-Mengen

$$X \cong \bigsqcup_{i \in I} G/H_i,$$

d.h. einer disjunkten Vereinigung, wobei die $H_i \subset G$ Untergruppen sind (aber nicht notwendig Normalteiler). Hier und im folgenden operiert G auf G/H_i von links, d.h. $g \cdot (xH_i) := (gx)H_i$.

(ii) Es besteht ein Isomorphismus von G-Mengen

$$\begin{aligned} G/H \times X &\to G \times^H X := (G \times X)/H, \\ (gH, x) &\mapsto [g, g^{-1}x] \\ (g, gx) &\leftarrow [g, x]. \end{aligned}$$

Hierbei wirkt H auf dem Ausdruck rechts diagonal, d.h. $h \cdot (g, x) := (gh^{-1}, hx)$ und $[-]$ bezeichnet die Nebenklasse bezüglich dieser Wirkung.

(iii) Sei $S \subset G$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $H \setminus G/K$ (d.h. die Abbildung $S \subset G \to H \setminus G/K$ ist bijektiv). Dann besteht ein Isomorphismus von G-Mengen

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{s \in S} G/(H \cap sKs^{-1}) &\xrightarrow{\cong} G/H \times G/K, \\ g \text{ in der } s\text{-Komponente} &\mapsto (gH, gsK). \end{aligned} \tag{7.4}$$

(iv) *Es gilt* $\mathrm{Hom}_G(G/H, X) = X^H$ *für jede Untergruppe* $H \subset G$ *und jede* G*-Menge* X.

(v) *Es gilt* $\mathrm{Hom}_G(G/H, G/K) \neq \emptyset$ *genau dann, wenn* H *zu* K subkonjugiert *ist, d.h. wenn es* $g \in G$ *gibt mit* $gHg^{-1} \subset K$.

Außerdem ist G/H *als* G*-Menge isomorph zu* G/K *genau dann, wenn* H *zu* K *konjugiert ist. Ferner ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} W_G(H) := N_G(H)/H &\to \mathrm{Aut}_G(G/H) \\ x &\mapsto (gH \mapsto gxH) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus. (Hierbei ist $N_G(H)$ *der* Normalisator *von* H *in* G*, d.h.* $N_G(H) = \{g \in G, gH = Hg\}$*.) Die Gruppe* $W_G(H)$ *oder kurz* WH *heißt* Weyl-Gruppe *(von* H *in* G*).*

Beweis. Wir zeigen nur (i) und (iii), die übrigen Aufgaben sind eine (ähnlich leichte) Übungsaufgabe.

(i): Zunächst ist X die disjunkte Vereinigung der G-Orbits $G \cdot x_i$ für geeignete $x_i \in X$ (denn wenn $G \cdot x_i \cap G \cdot x_j$ nicht leer ist, so gilt $x_i \in G \cdot x_j$.) Auf jeder solchen G-Menge $G \cdot x_i$ operiert G transitiv. Der Stabilisator $H_i := \mathrm{Stab}_G\, x_i := \{g \in G, gx_i = x_i\}$ ist eine Untergruppe. Die Abbildung $G/H_i \to G \cdot x_i, gH_i \mapsto g \cdot x_i$ ist eine G-äquivariante Bijektion.

(ii): Dieser Isomorphismus entsteht durch H-Quotientenbildung des Isomorphismus (auf dem ersten Term wirkt G nur auf dem ersten Faktor, rechts wirkt es diagonal auf beiden Faktoren):

$$\begin{aligned} G \times X &\to G \times X, \\ (g, x) &\mapsto (g, g^{-1}x). \end{aligned}$$

(iii): Wenden wir (ii) auf $X = G/K$ an, erhalten wir $G/H \times G/K \cong G \times^H G/K$. Betrachte die kanonische Abbildung $\varphi : G \times^H G/K \to H \setminus G/K$, die die erste Komponente vergisst. Das Urbild $\varphi^{-1}(HsK)$ besteht gerade aus den $[x, sK]$, wobei $x \in G$ beliebig und $[-]$ wie oben die Nebenklasse bzgl. der diagonalen H-Wirkung bezeichnet. Offenbar operiert G transitiv auf $\varphi^{-1}(HsK)$ und der Stabilisator ist $H \cap sKs^{-1}$: wenn für ein $g \in G$ gilt $[g, sK] = [e_G, sK]$ gibt es ein $h \in H$ mit $gh^{-1} = e$ und $hsK = sK$. Dies ist äquivalent zu $g = h \in sKs^{-1}$. □

7.2 Äquivariante Vektorbündel

Wir werden Mackey-Theorie mit Hilfe von sog. äquivarianten Vektorbündeln formulieren, d.h. die Aussagen der Mackey-Theorie geometrisch deuten, was z.B. auch bei der Analyse von Darstellungen der symmetrischen Gruppen S_n und der Gruppen $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ dienlich ist, siehe z.B. [Liu80] und auch [Bum13, §47].

Als Motivation für diese geometrischen Aussagen dient folgende Situation:

$$\begin{tikzcd} W := f^{-1}(X) \arrow[r, hook] \arrow[d] & Z \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & \mathbf{R} \\ X \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}$$

hierbei seien X, Y, Z endliche Mengen und f, φ beliebige Abbildungen. Die Funktion z können wir einerseits zuerst auf W einschränken und dann "integrieren", d.h. betrachten

$$x \mapsto \sum_{w \in f^{-1}(x)} \varphi(w).$$

Umgekehrt können wir diesen Ausdruck auch erhalten, indem wir zunächst "integrieren" (d.h.

$$y \mapsto \sum_{z \in f^{-1}(y)} \varphi(z)$$

betrachten) und diese Funktion dann auf X einschränken. Offensichtlich stimmen beide Funktionen überein.

Die Formulierung des Satzes von Mackey, die wir anstreben, wird ähnlich sein, nur dass wir anstelle von Mengen G-Mengen benutzen (und G-äquivariante Abbildungen zwischen ihnen) und anstelle einer Funktion sog. G-äquivariante Vektorbündel. Diese Begriffe führen wir zunächst ein.

Definition 7.5. Sei X eine G-Menge. Ein *G-äquivariantes Vektorbündel* auf X besteht aus einem k-Vektorraum V_x für jeden Punkt $x \in X$ sowie einer k-linearen Abbildung

$$\varphi_{g,x} : V_x \to V_{gx}$$

für alle $g \in G$, $x \in X$ derart, dass gilt $\varphi_{e_G,x} = \mathrm{id}_{V_x}$ für alle x und so, dass für alle $x \in X$, $g, g' \in G$ folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} V_x \arrow[r, "\varphi_{g,x}"] \arrow[rr, bend left, "\varphi_{g'g,x}"] & V_{gx} \arrow[r, "\varphi_{g',gx}"] & V_{g'gx} \end{tikzcd}$$

Diese Objekte und die folgenden naheliegenden Morphismen bilden eine Kategorie $\mathrm{Vect}_G(X)$; für jedes $x \in X$ eine lineare Abbildung $f_x : V_x \to W_x$ so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V_x \arrow[r, "\varphi_{g,x}"] \arrow[d, "f_x"] & V_{gx} \arrow[d, "f_{gx}"] \\ W_x \arrow[r, "\varphi_{g,x}"] & W_{gx}. \end{tikzcd}$$

Beispiel 7.6. Für die Menge $X = \{*\}$ (notwendigerweise versehen mit der trivialen G-Wirkung) ist ein G-äquivariantes Vektorbündel auf $\{*\}$ nichts anderes als eine G-Darstellung.

Dieses Beispiel wird durch folgendes Lemma verallgemeinert. Wir betrachten hierfür den folgenden Funktor

$$E : \mathrm{Rep}(H) \to \mathrm{Vect}_G(G/H), W \mapsto E(W) := G \times^H W.$$

Hierbei ist $G \times^H W$ der Quotient von $G \times W$ bezüglich der Äquivalenzrelation $(gh, w) \sim (g, hw)$ (hierbei ist gh das Produkt in G und wie üblich $hw := \pi(h)(w)$ für die H-Darstellung $H \xrightarrow{\pi} \mathrm{GL}(W)$). Wir haben eine natürlich Abbildung $E := E(W) := G \times^H W \to G/H$, $[(g, w)] \mapsto gH$. Bezeichne E_{gH} das Urbild von gH unter dieser Abbildung. Wir machen E_{gH} zu einem Vektorraum mittels der Addition die induziert ist durch

$$(g, w_1) + (g, w_2) := (g, w_1 + w_2).$$

(Dies ist wohldefiniert, denn es gilt $(gh, w_1)+(gh, w_2) = (g, hw_1)+(g, hw_2) = (g, hw_1+hw_2) = (g, h(w_1+w_2)) = (gh, w_1 + w_2)$, da die H-Wirkung auf W durch (k-lineare) Endomorphismen gegeben ist). Analog definiert man die skalare Multiplikation. Wir versehen E mit der G-Wirkung die durch

$$x \underbrace{(g, w)}_{\in E_{gH}} := \underbrace{(xg, w)}_{\in E_{xgH}}$$

für $x \in G$ induziert ist. Man prüft leicht nach, dass dies in der Tat ein G-Vektorbündel auf G/H ist.

Lemma 7.7. *Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann ist ein G-äquivariantes Vektorbündel V auf G/H nichts anderes als eine H-Darstellung. Präziser gesagt liefern die Zuweisungen*

$$V \mapsto (V_H, \text{ mit der gegebenen } H\text{-Wirkung}),$$
$$E(W) = G \times^H W \leftarrow\!\shortmid W$$

eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Vect}_G(G/H) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Rep}(H).$$

Beweis. Sei $V \in \mathrm{Vect}_G(G/H)$. Dann ist die Abbildung $G \times^H (V_H) \to V$, $(g \in G, r \in V_H) \mapsto \varphi_{g,H}(r) \in V_{gH}$ ein Isomorphismus von G-Bündeln auf G/H.

Sei umgekehrt $W \in \mathrm{Rep}(H)$. Dann besteht ein Isomorphismus von H-Darstellungen

$$W \cong (G \times^H W)_H, w \mapsto [(e, w)]$$

denn die rechte Seite besteht gerade aus H-Nebenklassen von Paaren (g, w) mit $gH = eH$, d.h. $g \in H$. □

Der Vorteil, $\mathrm{Vect}_G(G/H)$ anstelle von $\mathrm{Rep}H$ zu betrachten ist, dass wir Abbildungen zwischen verschiedenen Darstellungskategorien flexibler handhaben können.

Definition 7.8. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von G-Mengen. Dann ist die *Restriktion* definiert als

$$f^* : \mathrm{Vect}_G(Y) \to \mathrm{Vect}_G(X)$$

die einem G-Bündel $(V_y, \varphi_{V,g,y})$ auf Y folgendes G-Bündel auf X zuweist:

$$\left((f^*V)_x := V_{f(x)}, \quad \varphi_{f^*V,g,x} := \varphi_{V,g,f(x)} : (f^*V)_x \to (f^*V)_{gx}\right).$$

Definition 7.9. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von G-Mengen. Wir definieren einen Funktor ("*Koinduktion*")

$$f_! : \mathrm{Vect}_G(X) \to \mathrm{Vect}_G(Y)$$

durch

$$(f_! V)_y := \bigoplus_{x \in f^{-1}(y)} V_x$$

und

$$\varphi_{g,y} : \bigoplus_{x \in f^{-1}(y)} V_x \xrightarrow{\bigoplus_x \varphi_{g,x}} \bigoplus_{x \in f^{-1}(y)} V_{gx} = \bigoplus_{x \in f^{-1}(gy)} V_x = (f_! V)_{gy}.$$

Ein zweiter Funktor ("*Induktion*")

$$f_* : \mathrm{Vect}_G(X) \to \mathrm{Vect}_G(Y)$$

ist analog definiert, nur dass überall $\bigoplus$ durch $\prod$ ersetzt wird.

Bemerkung 7.10. Gemäß Übungsaufgabe 7.43 lassen sich Permutationsdarstellungen $k[X]$ bequem durch die Koinduktion für die Abbildung $X \to \{*\}$ ausdrücken. In der Bestimmung der irreduziblen Darstellungen der Borelgruppe B (4.35) und auch der Darstellungen der A_4 (Übungsaufgabe 4.56) war die Konstruktion geeigneter Permutationsdarstellungen ausschlaggebend für die Konstruktion aller irreduziblen Darstellungen. Allgemeiner wird die Möglichkeit "neue" Darstellungen durch (Ko-)Induktion zu erhalten, in verschiedenen Fällen von Nutzen sein, siehe z.B. Übungsaufgabe 7.45 für die Heisenberg-Gruppe.

Bemerkung 7.11. Wir erhalten stets eine natürliche Abbildung

$$f_! V \to f_* V.$$

Wenn die Urbilder $f^{-1}(y)$ für alle $y \in Y$ endlich sind, ist diese Abbildung ein Isomorphismus.

Definition 7.12. Seien $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ zwei Kategorien und $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ sowie $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ zwei Funktoren. Man sagt "F ist *linksadjungiert* zu G" oder "G ist *rechtsadjungiert* zu F", wenn es für Objekte $X \in \mathbf{C}$ und $Y \in \mathbf{D}$ eine funktorielle Bijektion

$$\varphi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y))$$

gibt. Funktoriell bedeutet hierbei, dass für Morphismen $X' \xrightarrow{f} X$ (in $\mathbf{C}$) und $Y \xrightarrow{g} Y'$ (in $\mathbf{D}$) das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\cong", "\varphi_{X,Y}"'] \arrow[d, "b \mapsto g \circ b \circ F(f)"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)) \arrow[d, "a \mapsto G(g) \circ a \circ f"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X'), Y') \arrow[r, "\cong", "\varphi_{X',Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', G(Y')).
\end{tikzcd}$$

Theorem 7.13. *(*Frobenius-Reziprozität*) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von G-Mengen.*

(i) Dann gibt es funktorielle Bijektionen für alle $M \in \mathrm{Vect}_G(X)$, $N \in \mathrm{Vect}_G(Y)$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}_G(Y)}(f_! M, N) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}_G(X)}(M, f^* N),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}_G(X)}(f^* N, M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}_G(Y)}(N, f_* M).$$

Mit anderen Worten, $f_!$ ist linksadjungiert zu f^* und f_* ist rechtsadjungiert zu f^*.

(ii) Wenn die Urbilder $f^{-1}(y)$ alle endlich sind, ist gemäß Bemerkung 7.11 $f_! \cong f_*$, d.h. der links- und rechts-adjungierte Funktor von f^* stimmen überein.

Bemerkung 7.14. Teil (ii) werden wir v.a. anwenden, wenn G endlich und die G-Mengen von der Form

$$G/\mathrm{Untergruppe}$$

(also auch endlich) sind. Die harmlos aussehende Aussage ist durchaus etwas besonderes, denn oft haben rechts- und links-adjungierte Funktoren (sofern sie überhaupt existieren) eines gegebenen Funktors wenig miteinander gemeinsam, siehe z.B. Übungsaufgabe 7.48.

Beweis. Eine Abbildung von G-Vektorbündeln auf Y $j : f_!M \to N$ ist besteht aus linearen Abbildungen $j_y : \bigoplus_{x\mapsto y} M_x \to N_y$, die mit der G-Wirkung verträglich sind, d.h. für alle $g \in G$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{x\mapsto y} M_x \arrow[r, "j_y"] \arrow[d, "\varphi_{g,x}"] & N_y \arrow[d, "\varphi_{g,y}"] \\ \bigoplus_{x\mapsto gy} M_x \arrow[r, "j_{gy}"] & N_{gy}. \end{tikzcd}$$

Dies ist äquivalent dazu, Abbildungen $M_x \to N_{f(x)}$ für alle $x \in X$ anzugeben, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M_x \arrow[r, "j_x"] \arrow[d, "\varphi_{g,x}"] & N_{f(x)} \arrow[d, "\varphi_{g,f(x)}"] \\ M_x \arrow[r, "j_{gy}"] & N_{gf(x)}. \end{tikzcd}$$

Dieses Datum ist gerade eine Abbildung von G-Bündeln auf X: $M \to f^*N$. Der Beweis der zweiten Aussage ist analog. □

Die folgende Tatsache wird später im Beweis der Induktionssätze eine grundlegende Rolle spielen. Sei X eine G-Menge und V, W zwei G-Vektorbündel auf X. Dann definieren wir

$$V \otimes W$$

als das G-Bündel, mit $(V\otimes W)_x = V_x \otimes W_x$ und $\varphi_{g,x} : (V\otimes W)_x \to (V\otimes W)_{gx}$ ist definiert als $\varphi_{g,V,x}\otimes\varphi_{g,W,x}$. Man prüft sofort nach, dass es sich um ein G-Bündel handelt und dass unter der Äquivalenz $\mathrm{Vect}_G(G/H) \to \mathrm{Rep}_H$ (Lemma 7.7) dieser Begriff gerade zum bekannten Tensorprodut von Darstellungen korrespondiert.

Satz 7.15. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von G-Mengen, V ein G-Bündel auf X, W ein G-Bündel auf Y. Dann gibt es einen (in V und W funktoriellen) Isomorphismus von G-Bündeln auf Y, die sog.* Projektionsformel*:*

$$f_!(V \otimes f^*W) \xrightarrow{\cong} f_!V \otimes W.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} (f_!(V \otimes f^*W))_y &= \bigoplus_{x\mapsto y} (V \otimes f^*W)_x \\ &= \bigoplus_{x\mapsto y} (V_x \otimes (f^*W)_x) \\ &= \bigoplus_{x\mapsto y} (V_x \otimes W_y) \\ &\overset{*}{=} \left(\bigoplus_{x\mapsto y} V_x\right) \otimes W_y \\ &= (f_!V)_y \otimes W_y. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in * die Tatsache benutzt, dass Tensorprodukte mit direkten Summen vertauschen. Man prüft sofort nach, dass für $g \in G$ dieser Isomorphismus mit der g-Wirkung auf beiden Seiten verträglich ist. □

Bemerkung 7.16. Mit f_* wäre die obige Aussage i.A. (d.h. wenn $f^{-1}(y)$ unendlich ist) falsch, da $\otimes$ i.A. nicht mit $\prod$ vertauscht.

Wir kommen nun zum *Satz von Mackey*, in einer Formulierung mittels Vektorbündeln auf G-Mengen.

Theorem 7.17. *(Mackey) Sei*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "s"] & Y \end{tikzcd}$$

ein kartesisches Diagramm von G-Mengen, d.h. die Abbildung $\phi : X' \to X \times_Y Y' := \{(x, y'), f(x) = s(y')\} \subset X \times Y', x' \mapsto (s'(x'), f'(x'))$ ist ein Isomorphismus (von G-Mengen):

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, "\phi", "\cong"'] \arrow[drr, "s'"] \arrow[ddr, "f'"'] & & \\
& X \times_Y Y' \arrow[r, "\overline{s}"] \arrow[d, "\overline{f}"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y' \arrow[r, "s"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Dann gibt es für jedes $V \in \mathrm{Vect}_G(X)$ (in V funktoriellen) Isomorphismen

$$f'_! s'^* V \xrightarrow{\cong} s^* f_! V,$$
$$s^* f_* V \xrightarrow{\cong} f'_* s'^* V.$$

Beweis. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, "\phi"] \arrow[drr, "s'"] \arrow[ddr, "f'"'] & & \\
& X \times_Y Y' \arrow[r, "\overline{s}"] \arrow[d, "\overline{f}"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y' \arrow[r, "s"] & Y
\end{tikzcd}$$

worin ϕ ein Isomorphismus ist. Es gilt dann z.B. $f'_! s'^* = \overline{s}^* \phi^* \phi_! \overline{f}_!$ und, da ϕ ein Isomorphismus ist, gilt $\phi^* \phi_! = \mathrm{id}$. Ähnliche Überlegungen für die anderen Terme gestatten uns, anzunehmen, dass $X' = X \times_Y Y'$ ist.

Sei $V \in \mathrm{Vect}_G(X)$ und $y' \in Y'$. Dann ist

$$(f'_! s'^* V)_{y'} = \bigoplus_{x' \overset{f'}{\mapsto} y'} (s'^* V)_{x'} = \bigoplus_{x' \overset{f'}{\mapsto} y'} V_{s(x')}.$$

Dies ist (wegen $X' = X \times_Y Y'$) das gleiche wie

$$\bigoplus_{x \overset{f}{\mapsto} s(y')} V_x = (f_! V)_{s(y')} = (s^* f_! V)_{y'}.$$

Der Beweis des zweiten Isomorphismus ist ähnlich, nur mit $\prod$ anstelle von $\bigoplus$. □

7.3 Algebraische Beschreibung von Induktion und Restriktion

Restriktion, Induktion und Koinduktion, die oben auf geometrische Weise erhalten wurden, lassen sich auch algebraisch beschreiben. Für einen (nicht notwendig kommutativen, aber mit 1) Ring R bezeichne Mod_R die Kategorie der Links-R-Moduln. Da wir nur Links-Moduln betrachten werden, bezeichnen wir sie in der Folge kurz nur als Moduln.

Direkt aus den Definitionen des Begriffs "Modul" und "Modulhomomorphismus" folgt:

Lemma 7.18. *Eine G-Darstellung ist äquivalent zu einem kG-Modul. Eine G-äquivariante Abbildung ist äquivalent zu einem kG-Modulhomomorphismus.*

Wir erhalten also folgende Äquivalenzen von Kategorien (für eine Untergruppe $H \subset G$):

$$\mathrm{Vect}_G(G/H) = \mathrm{Rep}_H = \mathrm{Mod}_{k[H]}$$

und insbesondere

$$\mathrm{Vect}_G(\{*\}) = \mathrm{Rep}_G = \mathrm{Mod}_{k[G]}.$$

Direkt aus der Definition von f^* erhalten wir:

Lemma 7.19. *Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Wir betrachten den sog.* Restriktions-Funktor

$$\mathrm{Res}^H_G : \mathrm{Mod}_{kG} \to \mathrm{Mod}_{kH}$$

bzw.

$$\mathrm{Res}^H_G : \mathrm{Rep}_G \to \mathrm{Rep}_H$$

der einen kG-Modul (bzw. eine G-Darstellung) V abbildet auf V, aufgefasst als kH-Modul vermöge der Inklusion $kH \subset kG$ (bzw. aufgefasst als H-Darstellung vermöge der Inklusion $H \subset G$). Dann kommutiert folgendes Diagramm, wobei die Zeilen die o.g. Äquivalenzen von Kategorien sind und $f : G/H \to G/G = \{*\}$ die eindeutige Abbildung ist:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_G(G/G) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f^*"] & \mathrm{Rep}_G \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Res}^H_G"] & \mathrm{Mod}_{kG} \arrow[d, "\mathrm{Res}^H_G"] \\ \mathrm{Vect}_G(G/H) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Rep}_H \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Mod}_{kH}. \end{tikzcd}$$

Wir beschreiben nun die adjungierten Funktoren f_* und $f_!$ in Termen der Modul- bzw. Darstellungskategorien. Hierzu verwenden wir eine Tatsache aus der Algebra:

Lemma 7.20. *Sei $R \to S$ ein Ringhomomorphismus beliebiger Ringe (nicht notwendig kommutativ, aber mit 1). Dann hat der Vergissfunktor*

$$U : \mathrm{Mod}_S \to \mathrm{Mod}_R$$

sowohl einen rechtsadjungierten Funktor $\mathrm{Hom}_R(S,-)$ und einen linksadjungierten Funktor $S \otimes_R -$. (Hierbei wird für einen Links-R-Modul M $\mathrm{Hom}_R(S,M)$ zum Links-S-Modul wie folgt: für $s \in S$, $f : S \to M$ ist $sf : S \to M$ gegeben durch $S \ni t \mapsto f(ts)$.)

Satz 7.21. *Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Sei wieder $f : G/H \to G/G = \{*\}$. Vermöge der o.g. Äquivalenz identifizieren sich die Funktoren f_* und $f_!$ wie folgt:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_G(G/H) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"] & \mathrm{Rep}_H \arrow[d, "\mathrm{Ind}^G_H := \mathrm{Hom}_{kH}(kG,-)"] \\ \mathrm{Vect}_G(*) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Rep}_G \end{tikzcd}$$

sowie

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_G(G/H) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_!"] & \mathrm{Rep}_H \arrow[d, "\mathrm{CoInd}^G_H := kG \otimes_{kH} -"] \\ \mathrm{Vect}_G(*) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Rep}_G \end{tikzcd}$$

Die Funktoren Ind^G_H und CoInd^G_H bezeichnen wir als Induktion *(von H nach G) bzw.* Koinduktion.

Es gilt für $W \in \mathrm{Rep}_G$, $V \in \mathrm{Rep}_H$ die Projektionsformel, *d.h. ein kanonischer Isomorphismus*

$$\mathrm{CoInd}^G_H(V \otimes \mathrm{Res}^H_G W) = \mathrm{CoInd}^G_H V \otimes W. \tag{7.22}$$

Hierbei ist links das Tensorprodukt von H-Darstellungen, rechts das von G-Darstellungen gemeint.

Es gibt stets eine natürliche Transformation von Funktoren

$$\mathrm{CoInd}^G_H \to \mathrm{Ind}^G_H.$$

Falls $H \subset G$ endlichen Index hat (insbesondere immer dann, wenn G endlich ist) ist diese ein Isomorphismus, d.h. es gilt (funktoriell) für jeden kH-Modul M:

$$kG \otimes_{kH} M \cong \mathrm{Hom}_{kH}(kG, M).$$

Beweis. Wir nutzen folgende Tatsache: seien

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} D \xrightarrow{G} \mathcal{E}$$

Funktoren sowie $F' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und $G' : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ rechtsadjungierte Funktoren von F bzw. G. Dann ist $F' \circ G'$ ein rechtsadjungierter Funktor von $G \circ F$.

Für eine Untergruppe $K \subset G$ sei $A_K : \mathrm{Vect}_G(G/K) \to \mathrm{Rep}_K$ der obige Funktor und $B_K : \mathrm{Rep}_K \to \mathrm{Vect}_G(G/K)$ der obige inverse Funktor. Da es sich um eine Äquivalenz von Kategorien handelt, ist A_K sowohl rechts-, als auch linksadjungiert zu B_K. Um

$$\mathrm{Ind}_H^G \circ A_H = A_G \circ f_*$$

zu sehen, genügt es zu zeigen, dass beide Funktoren rechtsadjungiert zu dem gleichen Funktor sind. In der Tat, sie sind nach Lemma 7.18 und nach der obigen Bemerkung beide rechtsadjungiert zu

$$B_H \circ \mathrm{Res}_G^H \overset{Lemma\ 7.19}{=} f^* \circ B_G.$$

$\square$

Bemerkung 7.23. Expliziter gilt für $H \subset G$, $V \in \mathrm{Rep}_H$:

$$\mathrm{Ind}_H^G(V) = \{f : G \to V, f(hg) = hf(g),\ \forall h \in H, g \in G\}. \tag{7.24}$$

Eine solche Funktion f ist eindeutig durch ihre Werte an einem Repräsentantensystem $S \subset G$ von $H\backslash G$ bestimmt, d.h. als Vektorraum gilt $\mathrm{Ind}_H^G(V) = \mathrm{Abb}(S, V)$ (Abbildungen von Mengen). Falls $\sharp S = \sharp H\backslash G$ endlich ist, gilt also insbesondere

$$\dim_k \mathrm{Ind}_H^G V = \sharp(H\backslash G) \cdot \dim_k V.$$

Ein Element $g \in G$ wirkt auf $f \in \mathrm{Ind}_H^G V$ (aufgefasst als Abbildung $G \xrightarrow{f} V$) wie folgt:

$$(g \cdot f)(x) = f(xg),$$

denn kG wird zu einem kG-*Rechts*-Modul durch die Ringmultiplikation. Die Rechts-kG-Modul-Struktur von kG liefert die obige Links-kG-Modulstruktur auf $\mathrm{Hom}_{kH}(kG, V)$.

Der Restriktionsfunktor wird oft auch nur mit $-|_H$ bezeichnet. Mit dieser Notation gelten folgende Gleichheiten, die sog. *1. Frobenius-Reziprozität* (die jedoch eine Tautologie ist):

$$\mathrm{Hom}_H(V|_H, W) = \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_H^G W) \quad \forall V \in \mathrm{Rep}_G, W \in \mathrm{Rep}_H$$

und die sog. *2. Frobenius-Reziprozität*, die gilt wenn der Index $[G : H]$ endlich ist:

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G V, W) = \mathrm{Hom}_H(V, W|_H) \quad \forall V \in \mathrm{Rep}_H, W \in \mathrm{Rep}_G.$$

Beispiel 7.25. Sei $G = S_3$ und $H = A_3 = \ker(S_3 \xrightarrow{\mathrm{sgn}} \mathbf{Z}/2)$ die alternierende Untergruppe. Die Gruppe $G = S_3$ wird erzeugt durch die Elemente $x = (12)$, $y = (123)$ mit den Relationen $x^2 = 1$, $y^3 = 1$ und $yx = xy^2$ (Übungsaufgabe 1.32). Die Untergruppe H wird durch y erzeugt mit der Relation $y^3 = 1$. Sei $V = \mathbf{C}$ die 1-dimensionale H-Darstellung, die y auf die primitive 3. Einheitswurzel $\omega = e^{2\pi i/3}$ abbildet.

Sei $f : G \to \mathbf{C}$ mit $f(hg) = hf(g)$ für alle $h \in H$, $g \in G$. Als Repräsentantensystem für $H\backslash G$ wählen wir $S = \{1, x\}$. Als $\mathbf{C}$-Vektorraum ist $\mathrm{Ind}_H^G V$ gegeben durch $\mathrm{Abb}(S, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^2$, $f \mapsto (f(1), f(x))$. Die Wirkung von $x \in G$ auf f ist

$$(xf)(1) = f(x), (xf)(x) = f(x^2) = f(1)$$

d.h. x wirkt auf $\mathbf{C}^2$ durch Vertauschen der Standardbasisvektoren, d.h. in Matrizenschreibweise als $\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$. Die Wirkung von $y \in G$ auf f ist

$$(yf)(1) = f(y) = yf(1) = \omega f(1),$$

sowie

$$(yf)(x) = f(xy) = f(y^2x) = y^2 f(x) = \omega^2 f(x).$$

D.h. bezüglich der obigen Basis (gegeben durch die Elemente $1, x$) hat y die Matrix $\begin{pmatrix} \omega & \\ & \omega^2 \end{pmatrix}$. Dies ist gerade die 2-dimensionale (irreduzible) Darstellung von S_3 aus Beispiel 1.7.

Wir bestimmen nun die Charaktere von restringierten bzw. induzierten Darstellungen:

Satz 7.26. *Sei $H \subset G$ eine Untergruppe.*

(i) Für eine endlich-dimensionale G-Darstellung W gilt

$$\chi_{\mathrm{Res}_G^H W}(h) = \chi_W(h).$$

(ii) *Falls H endlichen Index in G hat, wähle ein Repräsentantensytem S von $H\backslash G$. Dann gilt für jede endlichdimensionale H-Darstellung V:*

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G V}(g) = \sum_{s\in S, sgs^{-1}\in H} \chi_V(sgs^{-1}).$$

Falls $\mathrm{char} k \nmid \sharp H$ *so gilt außerdem:*

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G V}(g) = \frac{1}{\sharp H} \sum_{s\in G, sgs^{-1}\in H} \chi_V(sgs^{-1}).$$

Beweis. Die erste Aussage ist direkt klar nach Definition.

Für die zweite Aussage nutzen wir die Zerlegung (als k-Vektorräume)

$$I := \mathrm{Ind}_H^G V = \mathrm{Abb}(S, V) = V^{\oplus S}.$$

Für $s \in G$ sei $I_s \subset I$ der Unterraum der Funktionen f, die auf allen $x \notin Hs$ verschwinden. Diese Bedingung hängt nur von der Links-Nebenklasse $Hs \in H\backslash G$ ab und wir erhalten eine Zerlegung (als Vektorräume) $I = \bigoplus_{s\in H\backslash G} I_s = \bigoplus_{s\in S} I_s$. Die Wirkung eines $g \in G$ auf I permutiert die direkten Summanden, genauer gilt $gI_s = I_{sg^{-1}}$, denn $(gf)(x) = f(xg)$.

Es gilt also

$$\mathrm{tr}(I \xrightarrow{g} I) = \sum_{s\in S, sg^{-1}\in Hs} \mathrm{tr}(I_s \xrightarrow{g} I_s).$$

Die Bedingung in der Summe ist äquivalent zu $sgs^{-1} \in H$. Wir nutzen nun folgende Isomorphismen:

$$V \xrightarrow{\alpha} I_s \xrightarrow{\beta} V,$$

$\alpha(v) = (hs \mapsto h \cdot v)$, $\beta(f) := f(s)$. Es gilt außerdem

$$\mathrm{tr}(I_s \xrightarrow{g} I_s) = \mathrm{tr}(V \xrightarrow{\beta} I_s \xrightarrow{g} I_s \xrightarrow{\alpha} V) = \mathrm{tr}(V \xrightarrow{sgs^{-1}} V).$$

Hieraus folgt die erste Behauptung. Die zweite folgt hieraus unter Benutzung der Bijektion $H\times S \to G$, $(h, s) \mapsto hs$ und der Tatsache, dass χ_V eine Klassenfunktion ist, d.h. dass gilt $\chi_V((hs)g(hs)^{-1}) = \chi_V(hsgs^{-1}h^{-1}) = \chi_V(sgs^{-1})$. □

Viele Autoren formulieren den Satz von Mackey wie folgt; wir erhalten es als Spezialfall:

Folgerung 7.27. *Seien H, K Untergruppen von G. Wähle ein vollständiges Repräsentantensystem S von $H \backslash G/K$. Für $s \in S$ schreibe $K_s := H \cap sKs^{-1}$. Sei $\pi : K \to \mathrm{GL}(V)$ eine K-Darstellung und betrachte die Darstellung*

$$\pi_s : K_s \to \mathrm{GL}(V), \pi_s(x) \mapsto \pi(s^{-1}xs).$$

Dann gilt für jede K-Darstellung V:

$$\mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_K^G V = \prod_{s\in S} \mathrm{Ind}_{K_s}^H V_s.$$

$$\mathrm{Res}_H^G \mathrm{CoInd}_K^G V = \bigoplus_{s\in S} \mathrm{CoInd}_{K_s}^H V_s.$$

Beweis. Wir nutzen Satz 7.3 und betrachten das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} G/K \times G/H = \coprod_{s\in S} G/K_s \arrow[r, "z'"] \arrow[d, "f'"] & G/K \arrow[d, "f"] \\ G/H \arrow[r, "z"] & G/G = * \end{tikzcd}$$

Hierbei ist $f'(gK_s) = gH$ und $z'(gK_s) = gsK$. Es gilt nun $\mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_K^G = z^* f_*$. Nach dem Satz von Mackey in der Form von Theorem 7.17 ist dies isomorph zu $f'_* z'^*$. Der Funktor f'_* ist gerade $\prod_{s\in S} \mathrm{Ind}_{K_s} H$. Schreibe $z'_s : G/K_s \to G/K, g \mapsto gs$.

Die Abbildung z' ist auf der s-Komponente in $\bigsqcup_s G/K_s$ gegeben durch $gK_s := gsK$. Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_G(G/K) \arrow[r, "(z_s')^*"] \arrow[d, "A_K"', "\cong"] & \mathrm{Vect}_G(G/K_s) \arrow[d, "A_{K_s}"', "\cong"] \\ \mathrm{Rep}(K) \arrow[r, "\pi \mapsto \pi_s"] & \mathrm{Rep}(K_s). \end{tikzcd}$$

Dies prüfen wir nach, indem wir mit $V \in \mathrm{Vect}_G(G/K)$ beginnen. Bezeichne $A_K : \mathrm{Vect}_G(G/K) \to \mathrm{Rep}_K$ die obige Äquivalenz von Kategorien, gegeben durch $A_K(V) = V_K$. Analog mit A_{K_s}. Es gilt dann $A_{K_s}((z_s')^*V) = (z_s')^*(V)_{K_s} = V_{z_s'(K_s)} = V_{sK}$. Ein Element $x \in K_s$ schreibt sich als $x = sks^{-1}$ mit $k \in K$ und wirkt auf V_{sK} wie folgt:

$$\varphi_{x,sK} : V_{sK} \to (z_s')^* V_{xK_s} = V_{xsK}.$$

Andererseits ist $A_K(V) = V_K$ und $(V_K)_s$ ist der gleiche Vektorraum V_K, nur dass ein $x \in K_s$ hierauf wirkt durch $xv := s^{-1}xsv$. Nach Definition eines Vektorbündels kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V_{sK} \arrow[r, "\varphi_x"] & V_{xsK} = V_{skK} \arrow[d, "\varphi_{s^{-1}}"] \\ V_K \arrow[u, "\varphi_s"] \arrow[r, "\varphi_{s^{-1}xs} = \varphi_y"] & V_{kK} = V_K. \end{tikzcd}$$

Also kommutiert auch das obige Diagramm. $\square$

7.4 Verhalten von Irreduzibilität unter Induktion und Restriktion, Multiplizität 1

Theorem 7.28. *(*Mackeys Irreduzibilitätskriterium*) Sei $H \subset G$ eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G, W eine endlich-dimensionale H-Darstellung und $V := \mathrm{Ind}_H^G W$ die induzierte G-Darstellung. Sei k algebraisch abgeschlossen und* $\mathrm{char}\,k \nmid \sharp G$*. Dann ist V genau dann irreduzibel, wenn folgende beide Bedingungen erfüllt sind:*

(a) W ist irreduzibel

(b) Für alle $s \in G \setminus H$ sind die Darstellungen W^s und $\mathrm{Res}_H^{H_s} W$ disjunkt, d.h. es gibt keine irreduzible H_s-Darstellung, die (in der Zerlegung in irreduzible) sowohl in W^s als auch $\mathrm{Res}_H^{H_s} W$ auftaucht. Hierbei ist wie oben $H_s := H \cap sHs^{-1}$ und W^s ist die H_s-Darstellung, die durch den Vektorraum W mit der obigen H_s-Wirkung versehen ist, d.h. $x \in H_s$, wirkt als $s^{-1}xs (\in H)$ auf W.

Beweis. Es gelten folgende Gleichungen, die erste nach Frobenius-Reziprozität, die zweite nach Folgerung 7.27, dann wiederum Frobenius-Reziprozität:

$$\begin{aligned} \langle V, V \rangle_G &= \langle W, \mathrm{Res}_G^H V \rangle_H \\ &= \sum_{s \in H \backslash G / H} \langle W, \mathrm{Ind}_{H_s}^H W_s \rangle_H \\ &= \sum_{s \in H \backslash G / H} \langle \mathrm{Res}_H^{H_s} W, W_s \rangle_{H_s} \\ &=: \sum_s d_s. \end{aligned}$$

Für $s = 1$ gilt $d_1 = \langle W, W \rangle_H \geq 1$. Nach Satz 4.12 ist V genau dann irreduzibel, wenn $\langle V, V \rangle_G = 1$, dies ist nach obiger Rechnung genau dann der Fall, wenn $d_1 = 1$ und $d_s = 0$ für alle $HsH \neq HeH \in H \setminus G/H$, d.h. für alle $s \notin H$. Dies sind genau die Bedingungen (a) und (b). $\square$

Bemerkung 7.29. Der obige Beweis zeigt, dass für die Richtung $\Leftarrow$ die Voraussetzung (b) nicht benötigt wird. Siehe auch Übungsaufgabe 7.47 für einen anderen Beweis dieser Implikation.

Beispiel 7.30.

- Die Darstellung $kG = \mathrm{Ind}_1^G k$ ist (für $G \neq 1$) nach Übungsaufgabe 1.36 reduzibel. Im obigen Kriterium ist Bedingung (b) verletzt, denn 1^s und $\mathrm{Res}_H^{H_s} 1$ sind beide trivial, insbesondere nicht disjunkt.

- Die 2-dimensionale Darstellung $\rho_2 = \mathrm{Ind}_{A_3}^{S_3} W$ wie in Beispiel 7.25 ist (wie wir bereits wissen) irreduzibel. Dies kann man mittels Mackeys Kriterium ebenfalls leicht verifizieren.

- Für ein anderes Beispiel siehe Übungsaufgabe 8.47.

Eine zweite Frage ist das Verhalten irreduzibler Darstellungen unter der Restriktion.

Beispiel 7.31. Die zwei-dimensionale irreduzible S_3-Darstellung ρ_2 in Beispiel 1.7 lässt sich zu einer Darstellung der $S_2 \subset S_3$ einschränken. Da $S_2 = \mathbf{Z}/2$ abelsch ist, ist diese Darstellung nach Folgerung 2.4 reduzibel. In der Notation von Beispiel 1.7 wird S_3 von $x \in S_2 = \{1, x\}$ und $y \notin S_2$ erzeugt. Die Restriktion ist also die 2-dimensionale Darstellung versehen mit

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : k^2 \to k^2,$$

d.h. Multiplikation mit dieser Matrix, oder anders ausgedrückt das Vertauschen der Basisvektoren $e_1, e_2 \in k^2$. Diese Darstellung zerlegt sich als

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{S_3}^{S_2} \rho_2 &= k \cdot (1,1) \oplus k \cdot (1,-1) \\ &= 1_{S_2} \oplus \epsilon \end{aligned}.$$

Hierbei ist $\epsilon : S_2 \to \mathrm{GL}(k)$ die Signums-Darstellung, gegeben durch $\sigma \mapsto (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \mathrm{id}_k$, d.h. $x \mapsto -\mathrm{id}$.

Definition 7.32. Eine G-Darstellung hat die *Multiplizität-1-Eigenschaft*, wenn für jede irreduzible G-Darstellung W gilt

$$\langle V, W \rangle \leq 1,$$

d.h. wenn in einer Zerlegung $V = \bigoplus_{W \in \mathrm{Irrep}_G} W^{\oplus n_W}$ die $n_W \leq 1$ sind.

Definition 7.33. Sei $H \subset G$ eine Untergruppe und V eine H-Darstellung.

1. Das Tripel (G, H, V) heißt *Gelfand-Tripel* wenn $\mathrm{Ind}_H^G V$ (als G-Darstellung) die Multiplizität-1-Eigenschaft hat.

2. Das Paar (G, H) heißt *Gelfand-Paar*, wenn $(G, H, 1_H)$ ein Gelfand-Tripel ist.

3. Das Paar (G, H) heißt *starkes Gelfand-Paar*, wenn (G, H, V) für jede irreduzible H-Darstellung V ein Gelfand-Tripel ist.

Wir betrachten diese Eigenschaften im folgenden nur im Fall

$$\mathrm{char} k \nmid |G|, k = \overline{k},$$

denn zumindest für p-Gruppen und $\mathrm{char} k = p$ ist die Eigenschaft nach Theorem 6.1 stets erfüllt.

Bemerkung 7.34. Nach Frobenius-Reziprozität ist (G, H, V) ein Gelfand-Tripel genau dann, wenn für alle $W \in \mathrm{Irrep}_G$ gilt:

$$\langle V, \mathrm{Res}_G^H W \rangle_H \leq 1.$$

D.h. die irreduziblen G-Darstellungen zerfallen, als H-Darstellungen in einer Weise, so dass keine irreduzible H-Darstellung mehr als einmal auftaucht.

Beispiel 7.35. Das Paar (S_3, S_2) ist ein starkes Gelfand-Paar (vorausgesetzt $k = \overline{k}$, $\mathrm{char} k \nmid 6$): für die irreduzible Darstellung ρ_2 haben wir es überprüft; die übrigen irreduziblen S_3-Darstellungen sind beide eindimensional (1 und ϵ, siehe Beispiel 1.7) und daher auch nach Restriktion noch irreduzibel.

Beispiel 7.36. Sei G abelsch und $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann ist (G, H) ein starkes Gelfand-Paar, da die irreduziblen G-Darstellungen nach Theorem 4.22 alle eindimensional sind.

D.h. die Eigenschaft ist nur für nicht-abelsche Gruppen interessant. Andererseits lässt sich vermuten, dass sich hinter der Multiplizität-1-Eigenschaft eine gewisse Kommutativitätsbedingung verbirgt. Dies ist in der Tat der Fall:

Theorem 7.37. *Sei $H \subset G$ eine Untergruppe einer endlichen Gruppe. Sei W eine irreduzible H-Darstellung. Dann sind äquivalent:*

(i) (G, H, W) ist ein Gelfand-Tripel, d.h. für jede irreduzible G-Darstellung V enthält $\mathrm{Res}_G^H V$ die Darstellung W höchstens einmal als direkten Summanden (d.h. $\langle \mathrm{Res}_G^H V, W \rangle_H \leq 1$).

(ii) Für jede irreduzible G-Darstellung V enthält $\mathrm{Ind}_H^G W$ die Darstellung V höchstens einmal als direkten Summanden (d.h. $\langle V, \mathrm{Ind}_H^G W \rangle_G \leq 1$).

(iii) Die sog. Hecke-Algebra *des Tripels* (G, H, W)

$$\mathcal{H}_{G,H,W} := \mathcal{H}_W := \mathrm{End}_G(\mathrm{Ind}_H^G W)$$

(versehen mit der Komposition als Multiplikation) ist kommutativ.

Beweis. Die ersten beiden Bedingungen sind wie gesagt nach Frobenius-Reziprozität äquivalent:

$$\langle \mathrm{Res}_G^H V, W\rangle_H = \langle V, \mathrm{Ind}_H^G W\rangle_G.$$

Es genügt zu zeigen, dass für eine H-Darstellung R (wir wenden es auf $R = \mathrm{Ind}_H^G W$ an) $\mathrm{End}_G(R)$ genau dann kommutativ ist, wenn R jede irreduzible G-Darstellung V höchstens einmal enthält. Sei $R = \bigoplus R_i^{\oplus n_i}$ die Zerlegung in irreduzible, wobei die R_i paarweise nicht isomorph sind. Nach dem Lemma von Schur (Folgerung 2.3) gilt

$$\mathrm{End}_G(\bigoplus R_i^{\oplus n_i}) = \prod_i \mathrm{End}_G(\bigoplus R_i^{\oplus n_i}) = \prod_i \mathrm{End}(k^{n_i}).$$

(Für $i \neq j$ sind alle G-äquivarianten Abbildungen $R_i \to R_j$ 0; anschließend nutzen wir $\mathrm{End}_G(R_i) = k$). Letzterer Ring ist genau dann kommutativ, wenn alle $n_i = 1$ sind. □

Es gibt verschiedene hinreichende Kriterien dafür, wann ein Gelfand-Paar vorliegt. Wir werden das folgende Kriterium bei der Untersuchung von Darstellungen der $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ anwenden.

Satz 7.38. *(*Gelfand-Trick*) Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Angenommen, es gibt eine Abbildung (von Mengen) $\iota : G \to G$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$\iota^2 = \mathrm{id}$, d.h. $\iota(\iota(g)) = g$ für alle $g \in G$.*

2. *$\iota(gg') = \iota(g')\iota(g)$*

3. *Für alle $g \in G$ gilt $HgH = H\iota(g)H$.*

(Eine Abbildung ι, die die ersten beiden Eigenschaften erfüllt, heißt auch Involution.*) Dann ist (G, H) ein Gelfand-Paar.*

Beweis. Wir zeigen die Kommutativität der Hecke-Algebra $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{G,H,\mathrm{Ind}_H^G 1}$ mit Hilfe von Übungsaufgabe 7.49. Die Involution ι auf G liefert eine Involution auf $\mathrm{Abb}(G, k)$ (d.h. $(\iota f)(g) = f(\iota g))$). Wegen (2) setzt sie sich fort zu einer Involution auf $\mathcal{H} = \mathrm{Abb}(H \setminus G/H, k)$. Es gilt für $r, s \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
((\iota r) \star (\iota s))(g) &:= \sum_{x \in H\setminus G} (\iota r)(gx^{-1})(\iota s)(x) \\
&:= \sum_{x \in H\setminus G} r(\iota(x^{-1})\iota g)s(\iota x) \\
&= \sum_{x \in H\setminus G} s(\iota x)r(\iota(x^{-1})\iota g) \\
&\overset{!}{=} \sum_{x \in H\setminus G} s(\iota(g)x^{-1})r(x) \\
&=: (s \star r)(\iota g) \\
&=: (\iota(s \star r))(g).
\end{aligned}$$

Die Gleichheit “!” gilt aus folgenden Gründen: wenn x ein Repräsentantensystem von $H \setminus G$ durchläuft, durchläuft x^{-1} und ιx ein Repräsentantensystem von G/H, d.h. $\iota(x^{-1})$ und demzufolge auch $\iota(x^{-1})\iota g$ durchläuft ein Repräsentantensystem von $H \setminus G$. Wenn wir die Ersetzung $x := \iota(y^{-1})\iota g$ durchführen, d.h. $x(\iota g)^{-1} = \iota(y^{-1})$ oder (da für jede Involution gilt $\iota(y^{-1}) = (\iota y)^{-1}$) auch $\iota(g)x^{-1} = \iota y$, erhalten wir also

$$\sum_{y \in H\setminus G} s(\iota y)r(\iota(x^{-1})\iota g) = \sum_{x \in H\setminus G} s(\iota g x^{-1})r(x).$$

Also ist ι auf $\mathcal{H}$ ebenfalls eine Involution. Andererseits ist wegen (3) diese Involution gerade die Identität. Also ist die Konvolution (d.h. die Multiplikation auf $\mathcal{H}$) kommutativ. □

Beispiel 7.39. Dieses Kriterium gestattet uns, das obige Beispiel $S_2 \subset S_3$ zu verallgemeinern: Sei $G = S_n$, $H = S_{n-1}$. Die Abbildung $\iota : g \mapsto g^{-1}$ erfüllt die obigen Bedingungen. Um (3) zu prüfen, benutzen wir die Tatsache, dass S_n von S_{n-1} und dem Element $r := (1, 2, 3, \dots, n)$ erzeugt wird (es genügt sogar r und (12)). Um die Bedingung $g^{-1} \in S_{n-1} g S_{n-1}$ zu prüfen, genügt es also, den Fall $g = r^{-1}$ zu betrachten. Sei h die Permutation $(1, 2, \dots, n-1)^{-1} \in S_{n-1}$. Dann gilt

$$hgh = g^{-1}$$

wie man leicht nachprüft:
$$\begin{array}{r|ccccc} \mathrm{id} & 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ h & n-1 & 1 & \dots & n-2 & n \\ gh & 1 & \dots & n-2 & n & n-1 \\ hgh = g^{-1} & n & 1 & \dots & n-2 & n-1. \end{array}$$

Beispiel 7.40. Allgemeiner gilt, dass

$$(S_{n+m}, S_n \times S_m)$$

ein Gelfand-Paar ist.

7.5 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 7.41. Zeige die Aussagen in Satz 7.3(iv) und (v).

Übungsaufgabe 7.42. Sei k ein Körper, $G := \mathrm{GL}_n(k)$ und $T \subset G$ die Untergruppe der Diagonalmatrizen. Zeige, dass die Weyl-Gruppe

$$W_G T$$

isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n ist.

Übungsaufgabe 7.43. Sei X eine G-Menge und $p : X \to \{*\}$ die Projektion auf einen Punkt. Sei 1 das triviale G-Vektorbündel auf dem Punkt, d.h. der 1-dimensionale Vektorraum k mit der trivialen G-Wirkung, d.h. $\varphi_{g,*} := \mathrm{id}_k$. Zeige, dass unter der Äquivalenz $\mathrm{Rep}_G \cong \mathrm{Vect}_G(*)$ die Permutationsdarstellung $k[X]$ gerade zu $f_! f^* 1$ korrespondiert.

Übungsaufgabe 7.44. Sei G eine Gruppe und $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Abbildungen von G-Mengen. Etabliere natürliche Isomorphismen von Funktoren (zwischen den Kategorien von G-Vektorbündeln auf X bzw. Z)

$$\begin{aligned} f^* \circ g^* &= (g \circ f)^* \\ g_* \circ f_* &= (g \circ f)_* \\ g_! \circ f_! &= (g \circ f)_!. \end{aligned}$$

Folgere die sog. *Transitivität von (Ko-)Induktion und Restriktion*, d.h. für Untergruppen $K \subset H \subset G$

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}^K_H \circ \mathrm{Res}^H_G &= \mathrm{Res}^K_G \\ \mathrm{Ind}^G_H \circ \mathrm{Ind}^H_K &= \mathrm{Ind}^G_K \\ \mathrm{CoInd}^G_H \circ \mathrm{CoInd}^H_K &= \mathrm{CoInd}^G_K. \end{aligned}$$

Tipp: es ist zwar möglich, jedoch nicht nötig, die Aussagen "von Hand" nachzurechnen.

Übungsaufgabe 7.45. Das Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung der irreduziblen Darstellungen und Charaktertafel der *Heisenberg-Gruppe*

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & z \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, z, b \in \mathbf{F}_q \right\} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_q)$$

(über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k mit $\mathrm{char} k \neq p$, $q = p^n$). Wir schreiben eine solche Matrix der Kürze halber als $\{a, b, z\}$. Es gilt für das Zentrum $Z := Z(H) = \{\{0, 0, z\}, z \in \mathbf{F}_q\}$ (vgl. Übungsaufgabe 2.9).

1. Zeige durch explizite Rechnung: die Kommutator-Untergruppe stimmt mit dem Zentrum überein:

   $$[H, H] = Z.$$

   Zeige ferner: die Konjugationsklasse von $\{a, b, z\}$ hat genau 1 Element wenn $(a, b) = (0, 0)$ und genau q Elemente für $(a, b) \neq (0, 0)$.

2. Konstruiere eine exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \to Z \to H \to \mathbf{F}_q^2 \to 1.$$

Folgere, dass H genau q^2 eindimensionale Darstellungen hat.

3. Etabliere eine kurze exakte Sequenz

$$1 \to \{\{0, b, z\}\} \to H \to \mathbf{F}_q \to 1.$$

Die linke Gruppe bezeichnen wir mit K. Wir fixieren den Isomorphismus $K \cong \mathbf{F}_q^2, \{0, b, z\} \mapsto (b, z)$. Seien V_1, V_2 eindimensionale Darstellungen von $\mathbf{F}_q$ und V die (eindimensionale) Darstellung, die unter obigem Isomorphismus zu $V_1 \boxtimes V_2$ korrespondiert. Zeige, dass $\mathrm{Ind}_K^H V$ genau dann irreduzibel ist, wenn $V_2 \neq 1$ gilt.

4. Erläutere, wieso die q^2+q-1 gefundenen Darstellungen eine vollständige Liste von Irrep_H darstellen und bestimme die Charaktertafel.

Übungsaufgabe 7.46. Seien $n, m \geq 1$ mit $n|m$. Wir betrachten $H := \mathbf{Z}/n$ als Untergruppe von $G := \mathbf{Z}/m$, indem wir (die Nebenklasse von) 1 auf (die Nebenklasse von) m/n (welches nach Voraussetzung in $\mathbf{Z}$ liegt) abbilden. Sei $W : \mathbf{Z}/n \to k^\times$ die 1-dimensionale Darstellung, die (die Nebenklasse von) 1 auf eine fixierte n-te Einheitswurzel $\zeta \in k$ abbildet. Beschreibe mittels (7.24) die Darstellungen $V := \mathrm{Ind}_{\mathbf{Z}/n}^{\mathbf{Z}/m} W$ explizit: welche Dimension hat V? Beschreibe die Wirkung des Erzeugers von $\mathbf{Z}/m$ auf einer geeignet gewählten Basis von V.

Übungsaufgabe 7.47. Sei $H \subset G$ eine Untergruppe.

1. Sei $W \subset V$ eine Unter-H-Darstellung. Zeige, dass $\mathrm{Ind}_H^G W$ eine Unter-G-Darstellung ist.
2. Sei V eine H-Darstellung so dass $\mathrm{Ind}_H^G V$ irreduzibel ist. Zeige, dass dann V irreduzibel ist.

Übungsaufgabe 7.48. Sei $U : \mathrm{Top} \to \mathrm{Sets}$ der Funktor, der die Topologie auf einem topologischen Raum vergisst. (Top bezeichnet die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen, Sets die Kategorie der Mengen mit beliebigen Abbildungen.) Zeige, dass der linksadjungierte Funktor von U gegeben ist durch

$$M \mapsto (M, \text{ versehen mit der diskreten Topologie (alle Teilmengen sind offen) }).$$

Zeige, dass der rechtsadjungierte Funktor von U gegeben ist durch

$$M \mapsto (M, \text{ versehen mit der Klumpentopologie, d.h. nur } \emptyset \text{ und } X \text{ sind offen}).$$

Übungsaufgabe 7.49. (i) Sei G endlich, $K \subset G$ eine Untergruppe. Etabliere eine kanonische Identifikation

$$k[K \setminus G/K] \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}_G(\mathrm{Ind}_K^G 1_K).$$

Hierbei ist die linke Seite definiert als $\bigoplus_{s \in K\setminus G/K} k$, alternativ kann man es auch auffassen als den k-Vektorraum der bi-K-invarianten Funktionen $f : G \to k$, d.h. $f(xgx') = f(g)$ für alle $x, x' \in K$, $g \in G$.

(ii) Zeige, dass die Komposition von G-äquivarianten Endomorphismen von $\mathrm{Ind}_K^G 1$ in $k[K \setminus G/K]$ zur Faltung korrespondiert, d.h. zur Operation

$$(f_1 \star f_2)(g) := \sum_{x \in K\setminus G} f_1(gx^{-1}) f_2(x).$$

Man bezeichnet die Algebra $k[K \setminus G/K]$ (mit der Faltung als Multiplikation) auch als *Hecke-Algebra*, Notation $\mathcal{H}(G, K)$.

Übungsaufgabe 7.50. Sei G endlich, $H \subset G$ eine Untergruppe und V eine irreduzible G-Darstellung. Zeige

$$\dim V \leq [G : H] \cdot \max_{W \in \mathrm{Irrep}_H} \dim W.$$

Tipp: betrachte $\langle W, \mathrm{Res}_G^H V\rangle$.

Übungsaufgabe 7.51. Sei $D := D_n$ die *Diedergruppe*, d.h. die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks.

(i) Wir wissen aus Übungsaufgabe 4.44:

$$D_n = R \rtimes P,$$

wobei $R \cong \mathbf{Z}/n$ durch Rotationen um $(360/n)^\circ$ und $P = \mathbf{Z}/2$ durch eine Spiegelung erzeugt wird. Bezeichne mit τ einen Erzeuger von R und σ einen Erzeuger von P. Zeige, dass D $\frac{n+3}{2}$ Konjugationsklassen hat, falls n ungerade ist und $\frac{n+6}{2}$, falls n gerade ist. Zeige z.B. durch eine explizite Berechnung der Kommutatoren in D, dass $D_{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Z}/2$ wenn n ungerade und $(\mathbf{Z}/2)^2$ wenn n gerade ist.

(ii) Zeige, dass die induzierte Darstellung $\mathrm{Ind}_R^D V$ (für eine R-Darstellung V) genau dann irreduzibel ist, wenn V eine nicht-triviale 1-dimensionale Darstellung ist. Gib den Charakter dieser Darstellung an.

(iii) Seien V_1, V_2 zwei 1-dimensionale R-Darstellungen. Zeige, dass $\mathrm{Ind}_R^D V_1$ (als D-Darstellung) isomorph zu $\mathrm{Ind}_R^D V_2$ ist genau dann, wenn $V_1 \cong V_2$ oder $V_1 \cong V_2^*$.

(iv) Gib die Charaktertafel von D an.

Kapitel 8

Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$

In diesem Kapitel klassifizieren wir die komplexen Darstellungen der Gruppe

$$G := \mathrm{GL}_2(F),$$

wobei $F := \mathbf{F}_q$ ein endlicher Körper mit $q > 2$ ist. (Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ ist isomorph zu S_3, deren Darstellungen wir bereits kennen.) Die Bestimmung dieser Darstellungen ist eine schöne Anwendung verschiedener Techniken der vorigen Kapitel und ist außerdem ein kleiner Schritt in Richtung des Langlands-Programms. Unser Ziel ist die Klassifikation der G-Darstellungen in Termen von Darstellungen der sog. Weil-Gruppe, siehe Theorem 8.37.

Wir führen hierzu folgende Untergruppen ein

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix} \right\}$$
$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$D := \left\{ \begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix} \right\}$$

sowie das Element

$$w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G.$$

In der Theorie der algebraischen Gruppen heißt B eine *Borel-Untergruppe*, U ihr sog. *unipotentes Radikal*, D die *Levi-Untergruppe* von B und w_0 das *längste Weyl-Gruppen-Element*. (Gemäß Übungsaufgabe 7.42 ist die symmetrische Gruppe S_2 gerade die Weyl-Gruppe von D.)

Als Gruppen bestehen Isomorphismen

$$F \xrightarrow{\cong} U, x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F^\times \times F^\times \xrightarrow{\cong} D, (a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Es gibt außerdem eine spaltende exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \to U \to B \to D \to 1,$$

(die rechte Abbildung ist gegeben durch $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, ihr Spalt gegeben durch die kanonische Inklusion), d.h. B das halbdirekte Produkt

$$B = U \rtimes D.$$

Die Gruppe B ist daher *auflösbar*. Ihre Darstellungen hatten wir in Satz 4.37 bestimmt. Die Untergruppe U ist die Kommutator-Untergruppe von B. Hierbei wird benutzt, dass $q > 2$ ist.

Die Strategie zur Bestimmung der G-Darstellungen verläuft in folgenden Schritten:

1. Wir bestimmen zunächst die Konjugationsklassen in G und damit auch die Anzahl der irreduziblen G-Darstellungen.

2. Die G-Darstellungen zerfallen in zwei Typen: 1. welche wo $V^U \neq 0$ ist und 2. welche wo $V^U = 0$ ist. Darstellungen des ersten Typs kann man durch sog. *parabolische Induktion* erhalten, d.h. durch Induktion geeigneter B-Darstellungen. Letztere kennen wir bereits (Satz 4.37), so dass wir recht schnell eine Klassifikation solcher Darstellungen erhalten.

3. Darstellungen des 2. Typs sind schwerer explizit zu konstruieren. Man bezeichnet sie als kuspidale Darstellungen. Es zeigt sich, dass die Restriktion solcher Darstellungen zur Untergruppe
$$P := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
alle die (laut Übungsaufgabe 8.43) eindeutige höherdimensionale irreduzible P-Darstellung sind. Dies lässt sich schnell zum Verständnis von $\mathrm{Res}_G^B V$ erweitern. Die Gruppe G wird (wie sich zeigt) durch B und ein Element $w' := \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ mit gewissen expliziten Relationen erzeugt. Die Konstruktion der kuspidalen Darstellungen erfolgt dann durch eine explizite Konstruktion und Nachprüfen der Darstellungsaxiome.

4. Es ergibt sich dann eine vollständige Liste irreduzibler G-Darstellungen, die die bemerkenswerte Eigenschaft hat, dass sie in enger Weise mit den G-Konjugationsklassen in Beziehung steht und außerdem auch die o.g. Beziehung zu Darstellungen der Weil-Gruppe $W := \mathbf{F}_{q^2}^\times \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q)$ liefert.

8.1 Die Konjugationsklassen in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$

Wir bestimmen zunächst die Konjugationsklassen in G. Jedes Element $g \in G$ hat zwei Eigenwerte λ_1, λ_2. Wenn $\lambda_1 \in F$, dann ist auch $\lambda_2 \in F$, denn die λ_i sind Nullstellen des quadratischen charakteristischen Polynoms $\deg(g - t\mathrm{id}) = 0$ (welches ein Polynom in $F[t]$ ist). Das charakteristische Polynom von g und damit auch die Eigenwerte sind nur von der Konjugationsklasse von g abhängig.

Wir benötigen hierzu im folgenden eine Tatsache aus der Algebra: die Erweiterung $L := \mathbf{F}_{q^2}/F := \mathbf{F}_q$ ist die (bis auf Isomorphismus) eindeutige quadratische Körpererweiterung. (Falls q ungerade ist, kann man L als
$$L = F[T]/(T^2 - a)$$
konstruieren, wobei $a \in F$ ein Element ist, so dass es kein $b \in F$ gibt mit $a = b^2$. Dann ist das Polynom $T^2 - a$ irreduzibel, L also eine quadratische Körpererweiterung. Die Ableitung $2T \neq 0$ (für q ungerade), d.h. die Nullstellen des Polynoms sind einfache Nullstellen, es handelt sich also um eine separable Erweiterung. Wie jede quadratische Erweiterung ist sie normal, d.h. es handelt sich um eine Galois-Erweiterung.)

Die Gruppe $\mathrm{Gal}(L/F) := \{\sigma : L \to L, \sigma|_F = \mathrm{id}\}$ ist isomorph zu $\mathbf{Z}/2$. Bezeichne mit $\overline{} : L \to L$ die Wirkung des nicht-trivialen Elements dieser Gruppe. Dann gilt $F = \{x \in L, \overline{x} = x\}$. Bezeichne mit
$$\mathrm{N}x := x\overline{x}, \mathrm{tr}x := x + \overline{x}$$
die sog. *Norm* und *Spur* der Körpererweiterung L/F.

Satz 8.1. *G hat folgende Konjugationsklassen:*

Repräsentant der Klasse	$\begin{pmatrix} x & \\ & x \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & 1 \\ & x \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix}$, $x \neq y$	$\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{N}x \\ 1 & \mathrm{tr}x \end{pmatrix}$, $x \in L \setminus F$
Notation für den Repräsentanten	$c_1(x)$	$c_2(x)$	$c_3(x,y)$	$c_4(x)$
Anzahl der Klassen	$q-1$	$q-1$	$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$	$\frac{q(q-1)}{2}$
Eigenwerte	$\lambda_1 = \lambda_2 \in F$	$\lambda_1 = \lambda_2 \in F$	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in F$	$\lambda_1, \lambda_2 \in L \setminus F$

Beweis. Die ersten drei Fälle erhalten wir in dem Fall, dass das charakteristische Polynom $\chi_g(t) \in F[t]$ zwei Nullstellen (d.h. Eigenwerte λ_1, λ_2 von g) in K hat. Wir betrachten den letzten Fall, dass $\chi_g(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$ mit $\lambda_i \notin F$. Es gilt dann $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ sowie $\chi_g(t) = t^2 - \mathrm{tr}(\lambda_1)t + \mathrm{N}(\lambda_1)$. Sei $v \in F^2$ ein von null verschiedener Vektor. Dann bilden $\{v, gv\}$ eine Basis von F^2 (sonst gäbe es $\lambda \in F$ mit $gv = \lambda v$, im Widerspruch zur Annahme dass g keinen Eigenwert in F hat). Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $\chi_g(g) = g^2 - \mathrm{tr}(\lambda_1)g + \mathrm{N}(\lambda_1) = 0$. Bezüglich der o.g. Basis hat die Links-Multiplikation mit g also die Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{N}\lambda_1 \\ 1 & \mathrm{tr}\lambda_1 \end{pmatrix}.$$
Also ist g zu $c_4(x)$ konjugiert. Die Anzahl dieser Konjugationsklassen ist $\frac{q(q-1)}{2}$ da $\sharp L \setminus F = q^2 - q$ ist und $c_4(x) = c_4(y)$ genau dann gilt, wenn $x = y$ oder $x = \overline{y}$. $\square$

Folgerung 8.2. *Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ hat also $(q-1)(q+1) = q^2 - q + 1$ irreduzible Darstellungen (über $k = \overline{k}$, $\mathrm{char}k = 0$).*

8.2 Hauptreihendarstellungen

Definition 8.3. Sei $\chi : B \to \mathbf{C}^\times$ eine eindimensionale Darstellung von B (die wir mit ihrem Charakter identifizieren). Gemäß Satz 4.37 ist χ von der Form

$$\chi\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \chi_1(a)\chi_2(b)$$

für geeignete Charaktere χ_1, χ_2 von $F^\times$. (D.h. χ entsteht als Komposition $B \to D \to \mathbf{C}^\times$.) Die zu χ assoziierte *Hauptreihendarstellung* ist definiert als

$$I_{\chi_1,\chi_2} := I_\chi := \mathrm{Ind}_B^G \chi.$$

Die Hauptreihendarstellungen werden uns etliche irreduzible G-Darstellungen liefern. Wir werden zeigen:

Theorem 8.4. *Sei $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ ein Charakter von B mit zugehöriger Hauptreihendarstellung I_χ.*

1. *Wenn $\chi_1 \neq \chi_2$ ist, so ist I_χ eine irreduzible, $q+1$-dimensionale G-Darstellung. Hiervon gibt es $\frac{(q-1)(q-2)}{2}$ Darstellungen.*

2. *Wenn $\chi_1 = \chi_2$ ist, so zerfällt I_χ in zwei irreduzible Darstellungen, die eindimensional bzw. q-dimensional sind. Hiervon gibt es (jeweils) $q-1$ Darstellungen.*

Um dieses Theorem zu sehen, benötigen wir folgenden Begriff:

Definition und Lemma 8.5. Der *Jacquet-Funktor* ist definiert als

$$J : \mathrm{Rep}_G \to \mathrm{Rep}_B, V \mapsto V^U,$$

wobei rechts V als Darstellung von U via Restriktion aufgefasst wird und V^U die Invarianten bezüglich dieser Wirkung bezeichnet, d.h.

$$\begin{aligned} V^U &:= \{v \in V, uv = v \ \forall u \in U\} \\ &= \mathrm{Hom}_U(1, \mathrm{Res}_G^U V). \end{aligned}$$

Beweis. Zu zeigen ist, dass V^U zu einer B-Darstellung wird. Hierzu nutzen wir, dass U (als Kern des Gruppenhomomorphismus $B \to D$) ein Normalteiler in B ist. Für $v \in V^U$, $b \in B$ und $u \in U$ gilt dann $b^{-1}ub \in U$, also

$$ubv = b(b^{-1}ub)v = bv \in V.$$

Also schränkt sich die B-Wirkung auf V zu einer auf V^U ein. □

Lemma 8.6. *Als Menge (nicht als Gruppe) hat G die folgende sog.* Bruhat-Zerlegung *in zwei disjunkte Teilmengen:*

$$G = B \sqcup BwU.$$

Genauer ist die Abbildung

$$B \times U \to G \setminus B, (b, u) \mapsto bwu$$

eine Bijektion.

Beweis. Falls $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ mit $c \neq 0$ ist, so gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - ac^{-1}d & a \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $G = B \cup BwU$. Man prüft die weiteren Behauptungen durch ähnliche Rechnungen nach. □

Folgerung 8.7. *Es gilt $J(I_\chi) = \mathrm{Abb}(\{1, w\}, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^2$. Für die B-Wirkung auf $J(I_\chi)$ sind die Standardbasisvektoren $f_1, f_w \in J(I_\chi)$ Eigenvektoren mit Eigenwerten χ und χ_w, d.h. es gilt*

$$bf_1 = \chi(b)f_1, bf_w = \chi_w(b)f_w.$$

Hierbei ist $\chi_w : B \to \mathbf{C}$ wie in Theorem 7.28 definiert, d.h. $\chi_w(b) = \chi(w^{-1}bw) = \chi(wbw)$.

Beweis. Nach (7.24) und der Definition von J gilt

$$J(I_\chi) = \{f : G \to \mathbf{C}, f(bg) = bf(g), f(bu) = f(b)\}.$$

(Hierbei bedeutet $bf(g)$ die durch χ gegebene Wirkung von b auf dem 1-dimensionalen Vektorraum $\mathbf{C}$.) Gemäß der Bruhat-Zerlegung

$$G = B \sqcup BwU$$

gilt also folgende Identifikation von Vektorräumen

$$J(I_\chi) \xrightarrow{\cong} \mathbf{C}^2, f \mapsto (f(1), f(w)).$$

Es gilt nach (7.24) $(bf_1)(1) = f_1(b) = \chi(b)f_1(1)$. Außerdem gibt es laut Lemma 8.6 für $b \in B$ ein $b_1 \in B$, $u \in U$ so dass $wb = b_1wu$. Es folgt

$$(bf_1)(w) = f_1(wb) = f_1(b_1wu) = \chi(b_1)f_1(w) = 0 = \chi(b)f_1(w).$$

Wir zeigen die zweite Eigenwertgleichung $bf_w = \chi_w(b)f_w$ zunächst für $b = d \in D$. Es gilt

$$(df_w)(w) = f_w(wd) = f_w(\underbrace{wdw}_{\in B}w) = \chi(wdw)f_w(w) = \chi_w(d)f_w(w).$$

Da f_1 und f_w den Jacquet-Modul erzeugen, gibt es für $b \in B$ eindeutige $\alpha_1(b), \alpha_w(b) \in \mathbf{C}$ mit

$$bf_w = \alpha_1(b)f_1 + \alpha_w(b)f_w.$$

Werten wir diese Funktionen bei $g = 1$ aus, erhalten wir $\alpha_1(b) = 0$, d.h. $bf_w = \alpha_w(b)f_w$. Also ist $\alpha_w(b_1b_2) = \alpha_w(b_1)\alpha_w(b_2)$, d.h. $\alpha_w : B \to \mathbf{C}$ ist eine eindimensionale B-Darstellung. Dieser faktorisiert laut Satz 4.37 über den Homomorphismus $B \to D, b = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} =: d$. Es gilt also

$$(bf_w)(w) = a_w(b)f_w(w) = a_w(d)f_w(w) = (df_w)(w) = \chi_w(d)f_w(w) = \chi_w(b)f_w(w).$$

□

Lemma 8.8. *Sei V eine G-Darstellung. Dann ist $J(V) \neq 0$ genau dann, wenn es einen Charakter χ von B gibt mit der Eigenschaft*

$$\langle V, I_\chi\rangle_G \neq 0.$$

Insbesondere, falls V irreduzibel ist gilt $J(V) \neq 0$ genau dann, wenn V ein direkter Summand von I_χ ist.

Beweis. Der Jacquet-Modul $J(V)$ ist eine B-Darstellung, auf der U trivial operiert, d.h. eine $B/U = D$-Darstellung. Diese Gruppe ist abelsch, d.h. $J(V)$ ist eine direkte Summe von ein-dimensionalen (irreduziblen) D-Darstellungen.

Es gilt also $J(V) \neq 0$ genau dann, wenn es einen Charakter χ von D gibt (den wir vermöge der Surjektion $B \to D$ als Charakter von B auffassen) so, dass

$$\langle J(V), \chi\rangle_B \neq 0.$$

Es gilt, da $U \subset B$ die Kommutator-Untergruppe ist und damit auf χ trivial operiert, dass $\mathrm{Hom}_B(\chi, J(V)) = \mathrm{Hom}_B(\chi, \mathrm{Res}^B_G V)$. Damit und wegen Frobenius-Reziprozität ist der vorige Ausdruck gleich

$$\langle V, I_\chi\rangle_G = \langle \mathrm{Res}^B_G V, \chi\rangle_B.$$

□

Folgerung 8.9. *Für einen beliebigen Charakter χ von B hat I_χ höchstens zwei irreduzible Komponenten.*

Beweis. Zerlege $I_\chi = \bigoplus_{i=1}^r V_i$ in irreduzible G-Darstellungen. Nach Lemma 8.8 ist $J(V_i) \neq 0$. Damit gilt

$$\dim J(I_\chi) = \sum_{i=1}^r \dim J(V_i) \geq r.$$

Andererseits ist $\dim J(I_\chi) = 2$ nach Folgerung 8.7, d.h. $r \leq 2$. □

Wir bestimmen nun, welche irreduziblen Komponenten I_χ haben kann. Sei im folgenden χ stets ein beliebiger Charakter (d.h. eindimensionale Darstellung) von B.

Lemma 8.10. *Wenn $\chi = \chi_w$ (mit $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ ist dies äquivalent zu $\chi_1 = \chi_2$), dann hat I_χ eine eindimensionale irreduzible Komponente.*

Beweis. Es gilt $\chi(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ & \delta \end{pmatrix}) = \chi_1(a)\chi_1(d) = \chi_1(\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ & \delta \end{pmatrix})$. Sei $f : G \to \mathbf{C}$ definiert durch $f(g) = \chi_1(\det g)$. Dann gilt $f(bg) = \chi(b)f(g)$, d.h. $f \in I_\chi$. Für $s \in G$ gilt außerdem nach Definition $(sf)(g) = f(gs) = \chi_1(\det s)f(g)$, d.h. sf ist in dem eindimensionalen Unterraum $\mathbf{C}f \subset I_\chi$, d.h. es handelt sich um eine eindimensionale Unterdarstellung. □

Lemma 8.11. *I_χ hat höchstens eine eindimensionale Unterdarstellung.*

Beweis. Wären V_1 und V_2 zwei derartige Unterdarstellungen würde nach Folgerung 8.9 gelten $I_\chi = V_1 \oplus V_2$. Also $q + 1 = 2$, ein Widerspruch. □

Lemma 8.12. *Es gibt eine Zerlegung*

$$\mathrm{Res}^P_G I_\chi = \mathrm{Res}^P_B J(I_\chi) \oplus E$$

wobei E die eindeutige $(q-1)$-dimensionale irreduzible P-Darstellung ist.

Beweis. $J(I_\chi)$ ist eine Unter-B-Darstellung von I_χ, also gilt dies auch für die Restriktionen zu P-Darstellungen. Nach der Bestimmung der irreduziblen P-Darstellungen in Übungsaufgabe 8.43 bleibt zu zeigen, dass das Komplement keine eindimensionalen Unterdarstellungen hat (es gilt $\dim I_\chi - \dim J(I_\chi) = q+1-2$, d.h. E muss mit Multiplizität 1 in $\mathrm{Res}^P_G I_\chi$ auftauchen). Analog zur oben verwendeten Tatsache $B_{\mathrm{ab}} = D$ gilt auch $[P, P] = U$, d.h. $P_{\mathrm{ab}} = D$ (siehe (4.36)). Auf den eindimensionalen P-Darstellungen operiert U also trivial, d.h. eine eindimensionale P-Unterdarstellung von I_χ liegt notwendigerweise in $J(I_\chi)$. □

Lemma 8.13. *Wenn I_χ reduzibel ist, so hat I_χ eine eindimensionale irreduzible Komponente. Außerdem gilt*

$$\chi = \chi_w.$$

Beweis. Sei $I_\chi = V \oplus V'$ eine nicht-triviale Zerlegung in G-Darstellungen. Nach dem vorigen Lemma gilt

$$\mathrm{Res}^P_G I_\chi = \mathrm{Res}^P_G V \oplus \mathrm{Res}^P_G V' = \mathrm{Res}^P_B J(I_\chi) \oplus E,$$

d.h. E muss eine (irreduzible) Unterdarstellung von einem der beiden Summanden sein, sagen wir $E \subset \mathrm{Res}^P_G V$. Es gilt dann sogar $E \subsetneq V$ (andernfalls wäre $J(I_\chi) = V'$, andererseits ist jedoch $J(I_\chi) = J(V) \oplus J(V')$ und wir wissen nach Lemma 8.8 dass $J(V) \neq 0$ gilt). Also gilt wegen $\dim I_\chi = q+1$: $\dim V = q$ und $\dim V' = 1$.

Um die Behauptung $\chi = \chi_w$ zu zeigen, nutzen wir die eben konstruierte eindimensionale Unterdarstellung: wir haben also einen Charakter ψ von G sowie eine Funktion $f : G \to \mathbf{C}$, $f \neq 0$ mit

$$f(bg) = \chi(b)f(g),$$

$$f(gs) = \psi(s)f(g),$$

für $b \in B$ und $s \in G$. (In der Tat, die erste Gleichung drückt $f \in I_\chi$ aus, die zweite Gleichung ist die Eigenwertgleichung für die eindimensionale Darstellung ψ.)

Sei $g \in G$ derart, dass $f(g) \neq 0$. Da G endlich ist, hat g endliche Ordnung n, d.h. $g^n = 1$. Es folgt

$$f(1) = f(gg^{m-1}) = \underbrace{\psi(g^{m-1})}_{\neq 0} f(g)$$

also folgt $f(1) \neq 0$.

Sei $d \in D$ beliebig, dann gilt $\chi(d)f(1) = f(d) = \psi(d)f(1)$ und demnach $\chi(d) = \psi(d)$. Damit gilt

$$\chi_w(d) := \chi(wdw) = \psi(wdw) = \psi(w^2)\psi(d) = \chi(d),$$

also $\chi_w = \chi$. □

Lemma 8.14. *Seien χ und χ' verschiedene Charaktere von B. Dann sind äquivalent:*

(i) $I_\chi = I_{\chi'}$.

(ii) $\langle I_\chi, I_{\chi'} \rangle_G \neq 0$

(iii) $\chi' = \chi_w$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): ist trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Dann gibt es eine irreduzible G-Darstellung V, die sowohl in I_χ als auch in $I_{\chi'}$ vorkommt. Hieraus folgt nach Lemma 8.8 $J(V) \neq 0$. Ferner hat $\mathrm{Res}_G^B J(V)$ einen Eigenwert ψ, d.h. eine eindimensionale (B-)Unterdarstellung W, da $U = [B, B]$ auf $J(V)$ trivial operiert (dies wurde bereits im Beweis von Lemma 8.8 genutzt). Nach Folgerung 8.7 hat die B-Wirkung auf $J(I_\chi)$ genau zwei Eigenwerte, nämlich χ und χ_w. Also gilt $\psi = \chi$ oder $\psi = \chi_w$ da $J(\psi) \subset J(I_\chi)$. Analog gilt $\psi = \chi'$ oder $\psi = \chi'_w$. Wegen $\chi \neq \chi'$ folgt $\chi' = \chi_w$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): auf $\chi' = \chi_w$ folgt wieder mittels Folgerung 8.7, dass χ' eine Unterdarstellung von $\mathrm{Res}_G^B I_\chi$ ist, d.h. mittels Frobenius-Reziprozität gilt

$$\langle \mathrm{Res}_G^B I_\chi, \chi' \rangle_B = \langle I_\chi, I'_\chi \rangle_G \neq 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): es folgt dann $\chi \neq \chi_w$ und $\chi' \neq \chi'_w$. Nach Lemma 8.13 sind I_χ und $I_{\chi'}$ irreduzibel, so dass (i) aus (ii) folgt. □

Diese Aussagen liefern uns nun den Beweis von Theorem 8.4:

Beweis. Wenn I_χ reduzibel ist, hat es nach Lemma 8.13 genau eine eindimensionale irreduzible Komponente und es gilt $\chi = \chi_w$ und nach Folgerung 8.9 noch genau eine weitere irreduzible Komponente.

Wenn hingegen I_χ irreduzibel ist, folgt $\chi \neq \chi_w$ nach Lemma 8.10.

Die angegebenen Anzahlen der irreduziblen $q+1$-dimensionalen Darstellungen (im Fall $\chi \neq \chi_w$), die wir auf diese Weise erhalten, folgt aus Lemma 8.14. □

8.3 Kuspidale Darstellungen

Definition und Lemma 8.15. Für eine irreduzible Darstellung V von G sind äquivalent:

1. $J(V) = 0$.
2. V ist keine Unterdarstellung einer Hauptreihendarstellung I_χ.

Eine solche Darstellung heißt *kuspidale Darstellung*.

Beweis. Dies ist die Aussage von Lemma 8.8. □

Wir wissen nach Folgerung 8.2 und Theorem 8.4, dass es

$$(q-1)(q+1) - \frac{(q-1)(q-2)}{2} - 2(q-1) = (q-1)\frac{q}{2} \tag{8.16}$$

kuspidale Darstellungen gibt. Die Konstruktion dieser Darstellungen wird komplizierter sein als die der Hauptreihendarstellungen. Unser erstes Ziel ist die Bestimmung der Dimension.

Lemma 8.17. *Sei V eine kuspidale G-Darstellung. Dann hat $\mathrm{Res}_G^P V$ keine eindimensionalen (P-)Unterdarstellungen, d.h. es gilt*

$$\mathrm{Res}_G^P V = E^{\oplus r},$$

wobei E die eindeutige irreduzible P-Darstellung ist und $r \geq 1$. Insbesondere gilt $\dim V = r(q-1)$.

Beweis. Wäre $W \subset \mathrm{Res}_G^P V$ eine eindimensionale Unterdarstellung, so läge sie wegen $U = [P, P]$ sogar in $J(V)$, welches jedoch nach Annahme verschwindet. □

Satz 8.18. *Sei V eine G-Darstellungen. Dann sind äquivalent:*

1. *V ist kuspidal,*
2. *$\mathrm{Res}_G^P V = E$, die eindeutige $q-1$-dimensionale irreduzible Darstellung von P.*

Falls diese äquivalenten Bedingungen erfüllt sind, gilt

$$\dim V = q - 1.$$

Beweis. Wir wissen

$$\begin{aligned}(q-1)^2 q(q+1) &= \sharp G \\ &= \sum_{W \in \mathrm{Irrep}_G} (\dim W)^2 \\ &\geq (q-1)1^2 + (q-1)q^2 + \frac{(q-1)(q-2)}{2}(q+1)^2 + \sum_{W \text{ kuspidal}} \dim W,\end{aligned}$$

also wegen Lemma 8.17:

$$\frac{q^3}{2} - q^2 + \frac{q}{2} = \sum_{kuspidal} (\dim W)^2 = \sum_W r_W(q-1)$$

folgt

$$\frac{q^2-q}{2} = \sum_{W \text{ kuspidal}} r_W.$$

Die Anzahl der Summanden rechts ist, wie wir bereits wissen $\frac{q^2-q}{2}$, d.h. $r_W = 1$ für alle W. □

Bemerkung 8.19. Man kann mit einer Variante des Gelfand-Tricks auch zeigen, dass

$$\mathcal{H}_{G,U,\psi}$$

kommutativ ist (für ψ einen nicht-trivialen Charakter von U), und hieraus die obigen Behauptungen ohne Abzählen der Dimensionen der Darstellungen folgern. Siehe hierfür [CSST18, Theorem 14.6.3].

Es fragt sich also, wie die übrigen Elemente in $G \setminus P$ auf einer kuspidalen Darstellung operieren. Wir kennen ja bereits die irreduziblen B-Darstellungen und können daher aus $\mathrm{Res}_G^P V = E$ bestimmen, wie $\mathrm{Res}_G^B V$ aussieht:

Lemma 8.20. *Sei $\nu : \mathbf{F}_q^\times \to \mathbf{C}^\times$ ein Charakter (d.h. 1-dimensionale Darstellung) von $\mathbf{F}_q^\times$. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine B-Darstellung V, die folgendes erfüllt:*

$$\mathrm{Res}_B^P V = E$$

$$\mathrm{Res}_B^{\mathbf{F}_q^\times} = \nu \boxtimes 1^{\bigoplus (q-1)}.$$

Hierbei ist E die eindeutige irreduzible $(q-1)$-dimensionale P-Darstellung, siehe auch Übungsaufgabe 8.44 und $\mathbf{F}_q^\times$ wird in der zweiten Forderung als die Untergruppe der Matrizen der Form $\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ (mit $\delta \in \mathbf{F}_q^\times$) aufgefasst. (Nach dem vorigen Satz handelt es sich also um eine kuspidale, insbesondere irreduzible *G-Darstellung.)*

Wenn wir einen nicht-trivialen Charakter $\psi : \mathbf{F}_q \to \mathbf{C}^\times$ wählen mit $E = \mathrm{Ind}_U^P \psi$, so lässt sich V wie folgt konstruieren: sei $V := \mathrm{Abb}(\mathbf{F}_q^\times, \mathbf{C})$. Dann operiert $b = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ wie folgt auf $f \in V$:

$$(b \cdot f)(x) = \nu(\delta)\psi(\beta\delta^{-1}x)f(\alpha\delta^{-1}x). \tag{8.21}$$

Beweis. Die Eindeutigkeit einer solchen Darstellung V ist klar, da $B = P \rtimes \mathbf{F}_q^\times$. Die angegebene Formel definiert eine Darstellung von B, wie man durch eine kurze Rechnung sofort nachprüft. Die so definierte Darstellung erfüllt die beiden Bedingungen wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Diese Bestimmung der Aktion der Elemente in $G \setminus B$ werden wir mit Hilfe der folgenden Erzeuger und Relationen von G durchführen:

Lemma 8.22. *Die Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ (oder allgemeiner für einen beliebigen Körper) wird erzeugt durch die Untergruppe B sowie das Element*

$$w' := \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

und die folgenden Relationen

(i)

$$w' \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} w'^{-1} = \begin{pmatrix} \beta & \\ & \alpha \end{pmatrix}$$

(ii)

$$w'^2 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$s^3 = 1,$$

wobei $s := w'z$ mit $z := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Beweis. Man prüft durch direkte Rechnung sofort nach, dass die obigen Relationen erfüllt sind. Es gibt also einen Gruppenhomomorphismus

$$\theta : H := \langle B, w |\text{ obige Relationen } \rangle \to G.$$

Wegen der Bruhat-Zerlegung (Lemma 8.6) ist θ surjektiv.

Sei $g \in G \setminus B$. Mittels der Relation (ii) und $w'^2 \in B$ können wir g schreiben als

$$g = b_0 w' b_1 w' b_2 \dots w' b_r$$

mit $b_i \in B$ (ggf. sind b_0 oder $b_r = 1$). Falls $b_1 =: d \in D$, so gilt in H: $w'dw' = (w'dw'^{-1})w'^2$. Nach den Relationen (i) und (ii) ist ist (in H) gleich einem Element in B. In diesem Fall ist also $g = b_2' w' \dots w' b_r$ mit einem geeigneten $b_2' \in B$. Falls $b_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in B \setminus D$ ist, d.h. $\beta \neq 0$, so gilt

$$w' b_1 w' = b_1' w' b_2'. \tag{8.23}$$

mit $b_1', b_2' \in B$. In der Tat:

$$b_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta\beta^{-1} \end{pmatrix}}_{=:d'} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:z} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}}_{=:d''}.$$

Wegen der Relation (iii) gilt $w'zw'zw'z = 1$, also nach (ii) $w'zw' = z^{-1}w'^{-1}z^{-1} = z^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} w' z^{-1}$ und daher

$$w'b_1w' = (w'd'w'^{-1})w'zw'(w'^{-1}d''w') = \underbrace{(w'd'w'^{-1})z^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:b_1' \in B} w' \underbrace{z^{-1}(w'^{-1}d''w')}_{=:b_2' \in B}$$

wobei $b_1', b_2' \in B$ nach Relation (i). Die obige Behauptung (8.23) ist damit gezeigt. Also folgt auch im Fall $b_1 \in B \setminus D$) $g = b_2'' w' b_3 \dots w' b_r$. Dieses Argument wenden wir r mal an und erhalten $g \in Bw'B$, d.h. $g = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \delta' \end{pmatrix} w' \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$.

Sei nun $g \in \ker\theta$. Dann ist $g \notin B$, d.h. wir können annehmen, g ist in der obigen Form, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \theta(g) = \begin{pmatrix} * & * \\ -\delta'\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein Widerspruch. □

Kombinieren wir Lemma 8.20 und Lemma 8.22, müssen wir, um kuspidale Darstellungen zu konstruieren, also noch festlegen, wie w' auf V operiert. Diese Festlegung muss den Relationen (i)–(iii) genügen. Hierzu dient der folgende Satz:

Satz 8.24. *Sei $j : \mathbf{F}_q^\times \to \mathbf{C}$ eine Funktion, die für einen fixierten nicht-trivialen Charakter $\psi : \mathbf{F}_q \to \mathbf{C}^\times$ sowie einen Charakter $\nu : \mathbf{F}_q^\times \to \mathbf{C}^\times$ folgenden beiden Bedingungen genügt:*

(i)

$$\sum_{v \in \mathbf{F}_q^\times} j(uv)j(v)\nu(v^{-1}) = \begin{cases} \nu(-1) & u = 1 \\ 0 & u \neq 1 \end{cases},$$

wobei $u \in \mathbf{F}_q^\times$ beliebig.

(ii)

$$\sum_{v \in \mathbf{F}_q^\times} j(xv)j(yv)\nu(v^{-1})\psi(v) = \nu(-1)\psi(-x-y)j(xy).$$

Dann gibt es eine eindeutige kuspidale G-Darstellung V, so dass $\mathrm{Res}_G^B V$ die Bedingungen in Lemma 8.20 erfüllt und auf der w' wie folgt wirkt:

$$(w' \cdot f)(y) = \sum_{x \in \mathbf{F}_q^\times} \nu(x^{-1})j(yx)f(x). \tag{8.25}$$

Beweis. Wir zeigen die Relationen in Lemma 8.22 und beginnen mit (i) in der äquivalenten Form $w'\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} w'$. In der Tat:

$$\begin{aligned}
(w' \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot f)(y) &= \sum_{x \in \mathbf{F}_q^\times} \nu(x^{-1}) j(yx) (\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot f)(x) \\
&= \sum_{x \in \mathbf{F}_q^\times} \nu(x^{-1}) j(yx) \nu(\delta) f(\alpha\delta^{-1}x) \\
&\stackrel{*}{=} \sum_{x \in \mathbf{F}_q^\times} \nu(\alpha)\nu(x^{-1}) j(\delta\alpha^{-1}yx) f(x) \\
&= \nu(\alpha)(w' \cdot f)(\delta\alpha^{-1}y) \\
&= \left(\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot (w' \cdot f) \right)(y).
\end{aligned}$$

In der Gleichung "*" wurde benutzt, dass mit x auch $\alpha\delta^{-1}x$ $\mathbf{F}_q^\times$ durchläuft, sowie dass $\nu : \mathbf{F}_q^\times \to \mathbf{C}^\times$ ein Charakter (d.h. Gruppenhomomorphismus) ist.

Für die Relation (ii) berechne:

$$\begin{aligned}
(w' \cdot w' \cdot f)(z) &= \sum_{x \in \mathbf{F}_q^\times} \nu(x^{-1}) j(zx)(w' \cdot f)(x) \\
&= \sum_{x \in \mathbf{F}_q^\times} \nu(x^{-1}) j(zx) \sum_{y \in \mathbf{F}_q^\times} \nu(y^{-1}) j(xy) f(y) \\
&= \sum_{y \in \mathbf{F}_q^\times} \nu(y^{-1}) f(y) \sum_{x \in \mathbf{F}_q^\times} j(xy) j(zx) \nu(x^{-1}) \\
&\stackrel{*}{=} \sum_{u \in \mathbf{F}_q^\times} \nu(u^{-1}) f(uz) \sum_{v \in \mathbf{F}_q^\times} j(uv) j(v) \nu(v^{-1}) \\
&= \nu(-1) f(z) \\
&= \nu(-1) \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot f \right)(z).
\end{aligned}$$

In "*" wurde benutzt, dass mit x auch $v := zx$ $\mathbf{F}_q^\times$ durchläuft, sowie mit y auch $u := xyv^{-1}$, sowie ferner $\nu(y^{-1})\nu(x^{-1}) = \nu(u^{-1})\nu(v^{-1})$. Anschließend wurde die Voraussetzung (i) benutzt.

Schließlich schreiben wir die Relation (iii) in der äquivalenten Form

$$w' \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} w' \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch dies prüft man mit einer expliziten Rechnung ähnlich wie eben, mit der Voraussetzung (ii) nach (siehe Übungsaufgabe 8.45). □

Wir konstruieren nun Funktionen j, die im vorigen Satz zur Konstruktion kuspidaler Darstellungen herangezogen wurden. Hierfür benötigen wir einige Vorüberlegungen zum Verhältnis des Körpers $L := \mathbf{F}_{q^2}$ zu $F := \mathbf{F}_q$.

Lemma 8.26. *Es bestehen folgende exakte Sequenzen abelscher Gruppen*

$$1 \to F^\times \to L^\times \xrightarrow{x \mapsto x\overline{x}^{-1}} L^\times \xrightarrow{N} F^\times \to 1.$$

$$0 \to F \to L \xrightarrow{x \mapsto x - \overline{x}} L \xrightarrow{\mathrm{tr}} F \to 0.$$

Hierbei bezeichnet wieder $\overline{} : L \to L$ *die Wirkung des nicht-trivialen Elements der Galois-Gruppe, sowie* $\mathrm{N}x := x\overline{x}$ *die Norm und* $\mathrm{tr}x := x + \overline{x}$ *die Spur der Körpererweiterung.*

Beweis. Die Exaktheit jeweils links ist klar. Die Exaktheit an der zweiten Stelle von links gilt ebenfalls, denn für $x \in L$ ist $x = \overline{x}$ äquivalent zu $x \in F$. Außerdem ist klar, dass jede Kompositionen benachbarter Abbildungen jeweils der triviale Gruppenhomomorphismus ist.

Andererseits gilt $\mathrm{N}x = xx^q$, da $\overline{x} = x^q$ (die Galoisgruppe L/F wird vom Frobenius-Endomorphismus erzeugt). Also hat $\ker \mathrm{N}$ höchstens $q+1$ Elemente. Folglich hat das Bild der Norm-Abbildung $\sharp L^\times / \sharp \ker \mathrm{N} \geq$

$(q^2-1)(q+1) = q-1$ Elemente. Also ist N surjektiv und der Kern besteht aus genau $q+1$ Elementen. Da offenbar $\mathrm{im}\,(x \mapsto x\overline{x}^{-1}) \subset \ker \mathrm{N}$ gilt, und $q+1 = \sharp(L^\times/F^\times) = \sharp \ker \mathrm{N}$, muss Gleichheit gelten.

Das Argument für die Spur ist ähnlich: $\ker \mathrm{tr}$ besteht aus höchstens q Elementen, nämlich den Nullstellen des Polynoms $x + x^q$. Also gilt $\sharp \mathrm{im}\ \mathrm{tr} = \sharp L/\sharp \ker \mathrm{tr} \geq q^2/q$, also ist tr surjektiv und ihr Kern besteht aus genau q Elementen. Wegen $q = \sharp(L/F) \geq \sharp \ker \mathrm{tr} = q$, also folgt die Exaktheit der zweiten Sequenz. □

Definition und Lemma 8.27. Sei $\nu : L^\times \to \mathbf{C}^\times$ ein Charakter (d.h. Gruppenhomomorphismus). Bezeichne $\overline{\nu} : L^\times \to \mathbf{C}^\times$ den Charakter definiert durch $\overline{\nu}(x) := \nu(\overline{x})$. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt *keinen* Charakter $\chi : F^\times \to \mathbf{C}^\times$ mit

$$\nu(x) = \chi(\mathrm{N}(x)).$$

(ii) Es gilt $\nu \neq \overline{\nu}$.

(iii) Es gilt für jedes $x \in F^\times$:

$$\sum_{\mathrm{N}y=x} \nu(y) = 0.$$

Ein solcher Charakter ν heißt *unzerlegbar*. Andernfalls heißt er *zerlegbar*.

Beweis. Aus der Exaktheit der obigen Norm-Sequenz folgt: es gibt ein $y_0 \in L^\times$ mit $\mathrm{N}y_0 = x$. Außerdem ist $\mathrm{N}^{-1}(x) := \{y \in L^\times, \mathrm{N}y = x\}$ wegen dieser Exaktheit gerade $y_0 \cdot \mathrm{im}\,(z \mapsto z\overline{z}^{-1})$. Letzteres Bild ist bijektiv zu $L^\times/F^\times$. Die Kardinalität hiervon ist $q+1$. Dies begründet die erste Gleichheit:

$$(q+1)\sum_{\mathrm{N}y=x} \nu(y) = \sum_{z\in L^\times} \nu(y_0 z\overline{z}^{-1}) = \nu(y_0)\sum_{z\in L^\times} \nu(z)\nu(\overline{z}^{-1}) = \nu(y_0)\sum_{z\in L^\times} \nu(z)\overline{\nu}(z^{-1}).$$

Es gilt stets $\nu(y_0) \neq 0$. Die 1. Orthogonalitätsrelation besagt

$$\sum_{z\in L^\times} \nu(z)\overline{\nu}(z^{-1}) = \begin{cases} q^2-1 & \nu = \overline{\nu} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dies zeigt die Äquivalenz von (ii) und (iii).

Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt ebenfalls aus der exakten Sequenz nach Anwenden des Funktors $\mathrm{Hom}(-, \mathbf{C}^\times)$ (Homomorphismen abelscher Gruppen):

$$1 \to \mathrm{Hom}(F^\times, \mathbf{C}^\times) \xrightarrow{\chi \mapsto \chi\circ \mathrm{N}} \mathrm{Hom}(L^\times, \mathbf{C}^\times) \xrightarrow{\nu \mapsto \nu\overline{\nu}^{-1}} \mathrm{Hom}(L^\times, \mathbf{C}^\times). \tag{8.28}$$

□

Es gibt laut (8.28) also $(q^2-1)-(q-1) = q(q-1)$ unzerlegbare Charaktere von $L^\times$. Wir suchen gemäß (8.16) $\frac{q(q-1)}{2}$ kuspidale Darstellungen. Die Strategie wird sein, einem unzerlegbaren Charakter ν eine Funktion $j := j_\nu$ zuzuweisen, die den Bedingungen in Satz 8.24 genügt und zu zeigen, dass die hieraus resultierenden kuspidalen Darstellungen V_ν und $V_{\nu'}$ genau dann isomorph sind, wenn $\nu = \overline{\nu}'$ oder $\nu = \nu'$ gilt. Dies liefert uns dann alle kuspidalen und insgesamt also alle irreduziblen G-Darstellungen.

Notation 8.29. Sei $\nu : L^\times \to \mathbf{C}^\times$ im folgenden ein *unzerlegbarer* Charakter sowie $\psi : F \to \mathbf{C}^\times$ ein beliebiger nicht-trivialer Charakter.

Definition 8.30. Die *verallgemeinerte Kloosterman-Summe* ist die Funktion $j : F^\times \to \mathbf{C}^\times$

$$j(u) := j_\nu(u) := \frac{1}{q}\sum_{\mathrm{N}t=u, t\in L^\times} \psi(t+\overline{t})\nu(t).$$

Man beachte, dass dieser Ausdruck gemäß Definition und Lemma 8.27 0 ergibt, wenn man für ψ den trivialen Charakter einsetzt. Diese verallgemeinerte Kloosterman-Summe kann man konzeptionell wie folgt deuten: wir betrachten die Funktion $L \xrightarrow{\mathrm{tr}} F \xrightarrow{\psi} \mathbf{C}^\times$ und schränken sie auf $L^\times$ ein. Als solche ist sie ein Element in $r \in \mathbf{C}[L^\times]$. Die Fourier-Transformierte (für die Gruppe $L^\times$, man bezeichnet sie auch als *Mellin-Transformierte*) ist, bis auf den Vorfaktor q^{-1} gerade die Funktion j.

Satz 8.31. *Mit den obigen Bezeichnungen erfüllt die Funktion $j := j_\nu$ die Voraussetzungen in Satz 8.24. Die so konstruierte kuspidale G-Darstellung bezeichnen wir mit V_ν.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in F^\times} j(uv)j(v)\nu(v^{-1}) &\overset{1.}{=} q^{-2}\sum_v \sum_{\mathrm{N}t=uv,\mathrm{N}s=v} \psi(t+\bar t+s+\bar s)\nu(ts)\nu(v^{-1}) \\
&= q^{-2}\sum_v \sum_{\mathrm{N}t=uv,\mathrm{N}s=v} \psi(t+\bar t+s+\bar s)\nu(ts\mathrm{N}s^{-1}) \\
&= q^{-2}\sum_{s\in L^\times} \sum_{\mathrm{N}t=u\mathrm{N}s} \psi(t+\bar t+s+\bar s)\nu(t\bar s^{-1}) \\
&\overset{2.}{=} q^{-2}\sum_{\mathrm{N}\lambda=u} \sum_{s\in L^\times} \psi(s(1+\bar\lambda)+\bar s(1+\lambda))\nu(\lambda)
\end{aligned}$$

Hierbei wurde in 1. benutzt, dass ψ ein Charakter ist, in 2. wurde $\lambda := t\bar s^{-1}$ substituiert.

Für fixiertes λ ist die Abbildung $s \mapsto \psi(s(1+\bar\lambda)+\bar s(1+\lambda))$ ein Gruppenhomomorphismus $L \to \mathbf{C}^\times$. Dieser Charakter ist nicht-trivial genau dann, wenn $\lambda \neq -1$ ist, denn für jedes $a \in L^\times$ und $b \in F$ gibt es $x \in L$ mit $ax + \overline{ax} = b$ (dies folgt aus der exakten Spur-Sequenz: es gibt y mit $y + \bar y = b$, setze $x = y/a$). Also gilt nach der ersten Orthogonalitätsrelation (Satz 4.31, angewandt auf die Gruppe L)

$$\sum_{s\in L^\times} \psi(s(1+\bar\lambda)+\bar s(1+\lambda)) = \begin{cases} -1 & \lambda\neq -1 \\ \sharp L - 1 = q^2-1 & \lambda = -1 \end{cases}.$$

Demnach ist obiger Ausdruck also gleich

$$q^{-2}\left(\sum_{\mathrm{N}\lambda=u,\lambda\neq-1} -\nu(\lambda) + \sum_{\mathrm{N}\lambda=u,\lambda=-1} \nu(-1)(q^2-1)\right).$$

Die Summe rechts ist so zu verstehen, dass sie entfällt, wenn $u \neq \mathrm{N}(-1) = 1$.

Falls $u \neq 1$, entfällt also die rechte Summe, und die linke läuft über alle $\lambda \in L^\times$. Nach Definition und Lemma 8.27 ist der linke Summand dann 0.

Falls $u = 1$, so erhalten wir $q^{-2}\left(\sum_{N\lambda=1} -\nu(\lambda) + \nu(-1)\right)$, wegen Definition und Lemma 8.27 verschwindet die linke Summe, so dass die Behauptung folgt.

Wir zeigen nun die Bedingung (ii) in Satz 8.24. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{v\in F^\times} j(xv)j(yv)\nu(v^{-1})\psi(v) \\
&= q^{-2}\sum_v \sum_{\mathrm{N}t=xv,\mathrm{N}s=yv} \psi(t+\bar t+s+\bar s)\nu(ts)\nu(v^{-1})\psi(v) \\
&= q^{-2} \sum_{v\in F^\times,\mathrm{N}t=xv,\mathrm{N}s=yv} \psi(t+\bar t+s+\bar s+v)\nu(tsv^{-1}) \\
&\overset{1.}{=} q^{-2} \sum_{v\in F^\times,\mathrm{N}s=yv,\mathrm{N}\lambda=xy} \psi\left(y^{-1}(s+y+\lambda)(\overline{s+y+\lambda}) - y(1+y^{-1}\lambda)(\overline{1+y^{-1}\lambda})\right)\nu(\lambda) \\
&= q^{-2}\sum_{s\in L^\times}\sum_{\mathrm{N}\lambda=xy} \psi\left(y^{-1}(s+y+\lambda)(\overline{s+y+\lambda}) - y(1+y^{-1}\lambda)(\overline{1+y^{-1}\lambda})\right)\nu(\lambda) \\
&= q^{-2}\sum_{\mathrm{N}\lambda=xy} \psi\left(-y(1+y^{-1}\lambda)(\overline{1+y^{-1}\lambda})\right)\nu(\lambda)\sum_{s\in L^\times}\psi\left(y^{-1}(s+y+\lambda)(\overline{s+y+\lambda})\right).
\end{aligned}$$

In 1. haben wir substituiert $\lambda := yt\bar s^{-1} = tsv^{-1}$ (letztere Gleichheit wegen $\mathrm{N}s = yv$). Außerdem haben wir benutzt

$$\begin{aligned}
&y^{-1}(s+y+\lambda)(\overline{s+y+\lambda}) - y(1+y^{-1}\lambda)(\overline{1+y^{-1}\lambda}) \\
&= y^{-1}(s+y(1+t\bar s^{-1}))(\overline{s+y(1+t\bar s^{-1})}) - (y+\lambda)(\overline{1+y^{-1}\lambda}) \\
&= v + y^{-1}s\bar y(1+\bar t s^{-1}) + \bar s(1+t\bar s^{-1}) + \bar y(1+t\bar s^{-1})(1+\bar t s^{-1}) - y - yt\bar s^{-1} - y\bar t s^{-1} - y\mathrm{N}t/\mathrm{N}s \\
&= v + y^{-1}\bar y(s+\bar t) + (\bar s + t) + \bar y + \bar y t\bar s^{-1} + \bar y\bar t s^{-1} + \bar y\mathrm{N}t/\mathrm{N}s - y - yt\bar s^{-1} - y\bar t s^{-1} - y\mathrm{N}t/\mathrm{N}s \\
&\overset{y=\bar y}{=} v + s + \bar t + \bar s + t.
\end{aligned}$$

Die Summe rechts berechnen wir weiter:

$$\begin{aligned}\sum_{s\in L^\times}\psi\left(y^{-1}(s+y+\lambda)\overline{(s+y+\lambda)}\right) &= \sum_{s\in L}\psi\left(y^{-1}\underbrace{(s+y+\lambda)}_{=:t}\overline{(s+y+\lambda)}\right)-\psi\left(y^{-1}(y+\lambda)(y+\overline{\lambda})\right)\\ &= \sum_{t\in L}\psi(y^{-1}t\overline{t})-\psi(y^{-1}(y+\lambda)(y+\overline{\lambda}))\\ &= \sum_{t\in L^\times}\psi(y^{-1}t\overline{t})+\psi(0)-\psi(y^{-1}(y+\lambda)(y+\overline{\lambda}))\\ &= -q-\psi(y^{-1}(y+\lambda)(y+\overline{\lambda})).\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da in der Summe links $y^{-1}t\overline{t}$ laut Lemma 8.26 ganz $F^\times$ durchläuft, jedes Element in $F^\times$ genau $q+1=\sharp\ker\mathrm{N}$ mal getroffen wird und wiederum laut der 1. Orthogonalitätsrelation gilt $\sum_{r\in F^\times}\psi(r)=\sum_{r\in F}\psi(r)-\psi(0)=0-1$. Wir setzen dies oben ein und erhalten

$$\begin{aligned}&q^{-2}\sum_{\mathrm{N}\lambda=xy}\psi\left(\underbrace{-y(1+y^{-1}\lambda)\overline{(1+y^{-1}\lambda)}}_{=-y-x-(\lambda+\overline{\lambda})}\right)\nu(\lambda)\left(-q-\psi\left(\underbrace{y^{-1}(y+\lambda)(y+\overline{\lambda})}_{=y+x+\lambda+\overline{\lambda}}\right)\right)\\ &= -q^{-1}\sum_{\mathrm{N}\lambda=xy}\psi\left(-y-x-(\lambda+\overline{\lambda})\right)\nu(\lambda)-q^{-2}\sum_{\mathrm{N}\lambda=xy}\psi(0)\,\nu(\lambda)\\ &= -q^{-1}\psi(-x-y)\left(\sum_{\mathrm{N}\lambda=xy}\psi\left(-\lambda-\overline{\lambda}\right)\nu(\lambda)-q^{-2}\sum_{\mathrm{N}\lambda=xy}\nu(\lambda)\right)\\ &\overset{1.}{=} -q^{-1}\psi(-x-y)\nu(-1)\sum_{\mathrm{N}\lambda=xy}\psi\left(\lambda+\overline{\lambda}\right)\nu(\lambda)\\ &= \psi(-x-y)\nu(-1)j(xy).\end{aligned}$$

In der Gleichheit "1." haben wir benutzt, dass die rechte Summe verschwindet (Definition und Lemma 8.27) und die Summation über λ durch die über $-\lambda$ ersetzt. Dies war zu zeigen. □

Theorem 8.32. *Die Zuordnung $\nu\mapsto V_\nu$ liefert eine Bijektion*

$$\left\{\textit{unzerlegbare Charaktere von } L^\times\right\}/\textit{Konjugation}\ \overset{1:1}{\leftrightarrow}\ \{\textit{kuspidale } G\textit{-Darstellunengen}\}/\textit{Isomorphie}.$$

Mit anderen Worten: V_ν ist isomorph zu $V_{\nu'}$ genau dann, wenn $\nu=\nu'$ oder $\nu=\overline{\nu}'$ gilt.

Beweis. Die Richtung "$\Leftarrow$" ist klar nach Konstruktion der Darstellungen. Umgekehrt sei $\theta: V_\nu\to V_{\nu'}$ ein Isomorphismus von G-Darstellungen. Da V_ν und $V_{\nu'}$ beides irreduzible G-Darstellungen sind (da dies nach Anwenden von Res^P_G gilt), ist θ nach dem Lemma von Schur ein Vielfaches der Identität (auf $V:=\mathrm{Abb}(F^\times,\mathbf{C})$). Insbesondere gilt $g\cdot\theta(v)=\theta(g\cdot v)$ für alle $v\in V$, wobei $\cdot$ jeweils in V_ν bzw. $V_{\nu'}$ gemeint ist. Es folgt nach Definition der Wirkung des Elements $\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}$ in den Darstellungen V_ν für beliebige $\delta,y\in F^\times$ und $f\in V$:

$$\nu'(\delta)f(\delta^{-1}y)=\nu(\delta)f(\delta^{-1}y)$$

und damit

$$\nu'(\delta)=\nu(\delta)\tag{8.33}$$

für alle $\delta\in F^\times$. Nach Definition der Wirkung des Elements w' folgt überdies für alle f und y:

$$\sum_{x\in F^\times}\nu'(x^{-1})j_{\nu'}(yx)f(x)=\sum_{x\in F^\times}\nu(x^{-1})j_\nu(yx)f(x).$$

Wir erhalten hieraus $j_{\nu'}=j_\nu$, d.h. nach Definition von j:

$$\sum_{\mathrm{N}t=u}\psi(t+\overline{t})\nu'(t)=\sum_{\mathrm{N}t=u}\psi(t+\overline{t})\nu(t).$$

Für $\delta\in F^\times$ substituiere t durch δt und verwende $\nu(\delta)=\nu'(\delta)$ und erhalte

$$\sum_{\mathrm{N}t=v}\psi(\delta(t+\overline{t}))\nu'(t)=\sum_{\mathrm{N}t=v}\psi(\delta(t+\overline{t}))\nu(t)$$

oder auch

$$0 = \sum_{\mathrm{N}t=v}' \psi(\delta(t+\bar{t}))(\nu'(t)+\nu'(\bar{t})-\nu(t)-\nu(\bar{t})).$$

Hierbei bedeutet ' an der Summe, dass in jeder Klasse $\{t, \bar{t}\}$ nur jeweils ein Element als Summand verwendet wird.

Sei nun $x \in F$. Da L/F die eindeutige quadratische Erweiterung ist, hat das Polynom $X^2 - xX + v$ zwei Nullstellen, eine nennen wir $t \in L$, die andere ist $\bar{t}$. D.h. es gilt $\mathrm{tr}t = t + \bar{t} = x$, $\mathrm{N}t = t\bar{t} = v$. Der Ausdruck $a_x := \nu'(t) + \nu'(\bar{t}) - \nu(t) - \nu(\bar{t})$ hängt also nur von x ab und obige Gleichung schreiben wir hiermit kürzer als

$$\sum_{\mathrm{N}t=v} a_x \psi(\delta x) = 0.$$

Für $x_1 \neq x_2$ sind die Charaktere $\delta \mapsto \psi(\delta x_1)$ und $\delta \mapsto \psi(\delta x_2)$ verschieden (da ψ nicht-trivial ist). Nach dem Lemma von Artin (Übungsaufgabe 5.25) liefert die obige lineare Abhängigkeit dieser Charaktere $a_x = 0$ für alle $x \in K$, d.h. $\nu'(t) + \nu'(\bar{t}) = \nu(t) + \nu(\bar{t})$. Außerdem gilt wegen (8.33) $\nu'(t)\nu'(\bar{t}) = \nu(t)\nu(\bar{t})$. Also sind die Paare $(\nu'(t), \nu'(\bar{t}))$ und $(\nu(t), \nu(\bar{t}))$ beide Lösung der gleichen quadratischen Gleichung, d.h. die Mengen $\{\nu'(t), \nu'(\bar{t})\}$ und $\{\nu(t), \nu(\bar{t})\}$ stimmen überein. Insbesondere gilt dies für einen Erzeuger t_0 der zyklischen Gruppe $L^\times$. Wenn $\nu(t_0) = \nu'(t_0)$, so folgt also $\nu = \nu'$. Andernfalls folgt $\nu = \bar{\nu}$. □

Dies schließt die explizite Konstruktion aller irreduziblen G-Darstellungen ab. Die obigen Überlegungen gestatten sogar, einen engeren Bezug der Konjugationsklassen in G mit den irreduziblen G-Darstellungen anzugeben. (Für eine allgemeine endliche Gruppe G bestehen zwar Bijektionen zwischen diesen Mengen, jedoch kann man i.A. keine kanonische solche Bijektion angeben.) Hierbei verwenden wir die Notation

$$X(H) := \mathrm{Hom}(H, \mathbf{C}^\times)$$

für die sog. *Charaktergruppe* einer abelschen Gruppe H, d.h. $X(H) = \widehat{H}$ in der Nomenklatur von Satz 5.14.

Elemente in $L^\times$	$\alpha \in F^\times$	$\alpha \in F^\times$	$\alpha \neq \beta \in F^\times$	$\lambda \in L^\times \setminus F^\times$
Konjugationsklassen in G	$c_1(\alpha)$	$c_2(\alpha)$	$c_3(\alpha, \beta)$	$c_4(\lambda) = \begin{pmatrix} & -\mathrm{N}\lambda \\ 1 & \mathrm{tr}\lambda \end{pmatrix}$
Charaktere	$\chi_1 \in X(F^\times)$	$\chi_1 \in X(F^\times)$	$\chi_1 \neq \chi_2 \in X(F^\times)$	$\nu \in X(L^\times) \setminus X(F^\times)$
irreduzible G-Darstellung	Kp. von I_{χ_1,χ_1}	Kp. von I_{χ_1,χ_1}	I_{χ_1,χ_2}	V_ν
Dimension	1	q	$q+1$	$q-1$
Anzahl	$q-1$	$q-1$	$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$	$\frac{q(q-1)}{2}$

8.4 Das Reziprozitätsgesetz

Sei weiterhin $F = \mathbf{F}_q$ und L/F die eindeutige quadratische Erweiterung. Sie ist eine Galois-Erweiterung, deren Galoisgruppe wir mit $\mathrm{Gal}(L/F)$ bezeichnen.

Definition 8.34. Die *Weil-Gruppe* der Erweiterung L/F ist das halbdirekte Produkt

$$W := W(L/F) := L^\times \rtimes \mathrm{Gal}(L/F),$$

wobei die Multiplikation gegeben ist durch

$$(x, \sigma) \cdot (y, \tau) = (x \cdot \sigma(y), \sigma\tau).$$

(Mit anderen Worten, die halbdirekte Produktstruktur ist gegeben durch die kanonische Wirkung von $\mathrm{Gal}(L/F)$ auf $L^\times$.)

Bemerkung 8.35. Als abstrakte Gruppe stimmt W also mit der Diedergruppe D_{q-1} (siehe Übungsaufgabe 4.44 und Übungsaufgabe 7.51) überein.

Wir haben eine exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \to L^\times \to W(L/F) \to \mathrm{Gal}(L/F) \to 1.$$

Obwohl die beiden äußeren Gruppen beide abelsch sind, ist $W(L/F)$ nicht abelsch, z.B. gilt

$$[(x,\sigma),(y,\tau)] := (x,\sigma)(y,\tau)(x,\sigma)^{-1}(y,\tau)^{-1} = (x\sigma(y)\tau(x^{-1})y^{-1}, 1). \tag{8.36}$$

Überdies haben wir einen (surjektiven) Gruppenhomomorphismus

$$p : W \to F^\times, (x, \sigma) \mapsto \mathrm{N}(x).$$

Da $[W : L^\times] = 2$ und $L^\times$ abelsch ist, sind die irreduziblen W-Darstellungen laut Übungsaufgabe 7.50 höchstens 2-dimensional. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist folgendes Theorem:

Theorem 8.37. *Es besteht eine Bijektion zwischen den zwei-dimensionalen (nicht notwendig irreduziblen) W-Darstellungen und den höher-dimensionalen irreduziblen G-Darstellungen V (d.h. $\dim V \geq 2$).*

Sie entsteht durch Komposition folgender Bijektionen

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{irreduzible 2-dim'l}\\ W\textit{-Darstellungen}\\ \textit{bis auf Isomorphie}\end{array}\right\} \xleftarrow{\;1:1\;} \left\{\begin{array}{c}\textit{unzerlegbare Charaktere}\\ \textit{von } L^\times\\ \textit{bis auf Konjugation}\end{array}\right\} \xrightarrow{\;1:1\;} \left\{\begin{array}{c}\textit{kuspidale } G\textit{-}\\ \textit{Darstellungen}\\ \textit{bis auf Isomorphie}\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{r} \tau_\nu(x) := \begin{pmatrix} \nu(x) & 0 \\ 0 & \overline{\nu}(x) \end{pmatrix}, \\ \tau_\nu(\sigma) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \longleftarrow\!\!\!\longleftarrow\!\!\!\dashv \nu \longmapsto V_\nu$$

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{reduzible 2-dim'l}\\ W\textit{-Darstellungen}\\ \textit{bis auf Isomorphie}\end{array}\right\} \xleftarrow{\;1:1\;} \left\{\begin{array}{c}\textit{Paare von Charakteren von}\\ F^\times\\ \textit{bis auf Vertauschen}\end{array}\right\} \xrightarrow{\;1:1\;} \left\{\begin{array}{c}\textit{höher-dimensionale}\\ \textit{nicht kuspidale}\\ G\textit{-Darstellungen}\\ \textit{bis auf Isomorphie}\end{array}\right\}$$

$$(\chi_1 \circ p, \chi_2 \circ p) \longleftarrow\!\!\!\dashv (\chi_1, \chi_2) \longmapsto \begin{array}{c} I_{\chi_1,\chi_2} \textit{ falls } \chi_1 \neq \chi_2 \\ \textit{irred. Kp. von } I_{\chi_1,\chi_1} \textit{ falls } \chi_1 = \chi_2 \end{array}$$

Dieses Theorem ist quasi der Baby-Fall des *Langlands-Programms*. Eine (wesentlich) schwierigere grob ähnliche Aussage entsteht, wenn man den endlichen Körper $F = \mathbf{F}_q$ durch einen sogenannten lokalen Körper, z.B. den Körper $\mathbf{Q}_p$ der p-adischen Zahlen ersetzt. Dies bezeichnet man als das sog. *lokale Langlands-Programm*. Das *globale Langlands-Programm* widmet sich der Situation wo F ein globaler Körper wie z.B. $F = \mathbf{Q}$ ist. Weiterhin kann man anstatt der Gruppe $G = \mathrm{GL}_2$ auch allgemeiner GL_n betrachten oder allgemeiner sog. reduktive Gruppen wie z.B. SL_n oder auch die orthogonalen oder symplektischen Gruppen.

Lemma 8.38. *Sei V eine 2-dimensionale W-Darstellung. Dann sind äquivalent:*

(i) Jeder Charakter ν von $L^\times$ der in $\mathrm{Res}_W^{L^\times} V$ vorkommt (von diesen gibt es zwei Stück), ist unzerlegbar, d.h. $\nu \neq \overline{\nu}$ (Definition und Lemma 8.27).

(ii) V ist irreduzibel.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, gilt $\mathrm{Res}_W^{L^\times} V = \nu \oplus \overline{\nu}$.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$ das nicht-triviale Element und ebenfalls mit σ sein Bild in W (d.h. in der obigen Notation $(1, \sigma)$). Es gilt für $x \in L^\times$ folgende Relation in W:

$$x\sigma = \sigma\overline{x} \tag{8.39}$$

und W ist die Gruppe die von $L^\times$ und σ mit dieser Relation erzeugt wird.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen $V = V_1 \oplus V_2$ ist reduzibel mit gewissen Charakteren V_1 und V_2 von W. Da $x\overline{x}^{-1} \in [W, W]$ liegt wirken x und $\overline{x}$ in V_i (für $i = 1, 2$) jeweils gleich. Also sind die $\mathrm{Res}_W^{L^\times} V_i$ nach Definition und Lemma 8.27 zerlegbare Charaktere von $L^\times$ und ν stimmt mit einem von beiden überein, ist also ebenfalls zerlegbar.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei ν ein Charakter, der in $\mathrm{Res}_W^{L^\times} V$ vorkommt. Wir nehmen an, dass $\nu = \overline{\nu}$ gilt und zeigen, dass V reduzibel ist. Es gibt ein $0 \neq v_1 \in V$ mit

$$x \cdot v_1 = \nu(x) v_1 \tag{8.40}$$

für alle $x \in L^\times$. Setzen wir $v_2 := \sigma \cdot v_1$ so impliziert dies

$$x v_2 = \nu(\overline{x}) v_2 = \overline{\nu}(x) v_2 = \nu(x) v_2 \tag{8.41}$$

für alle $x \in L^\times$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Falls v_1 und v_2 linear unabhängig sind, spannen sie also V auf und aus (8.40) und (8.41) folgt, dass $x \cdot v = \nu(x)v$ für $x \in L^\times$ und alle $v \in V$. Sei v_3 ein Eigenvektor von σ (d.h. der Wirkung von σ auf V). Dann gilt $x \cdot v_3 = \nu(x)v_3$ und v_3 spannt (wie oben) eine 1-dimensionale W-Unterdarstellung von V auf, d.h. V ist reduzibel.

2. Falls hingegen $v_2 = cv_1$, so ist der von v_1 aufgespannte Untervektorraum auch eine Unter-W-Darstellung von V, diese ist damit reduzibel.

Die Schlussbehauptung folgt aus $xv_1 = \nu(x)v_1$ und $xv_2 = \overline{\nu}(x)v_2$ (siehe den ersten Teil von (8.41)), d.h. v_1 bzw. v_2 spannen jeweils eine 1-dimensionale $L^\times$-Unterdarstellung von V auf, die wegen $\nu \neq \overline{\nu}$ verschieden sind, so dass $\mathrm{Res}_W^{L^\times} V = \nu \oplus \overline{\nu}$ gilt. □

Beweis. (des Theorems) Die Surjektivität der angegebenen linken unteren Abbildung ist Teil der Aussage von Lemma 8.38. Die Injektivität folgt aus der Surjektivität der Abbildung $W \to F^\times$ und der Tatsache dass eine reduzible 2-dimensionale W-Darstellung einem Paar von Charakteren von W (bis auf Vertauschen) entspricht.

Lemma 8.38 zeigt ebenfalls, dass die angegebene 2-dimensionale W-Darstellung τ_ν irreduzibel ist, denn $\mathrm{Res}_W^{L^\times} \tau_\nu = \nu \oplus \overline{\nu}$ nach Definition. Ebenfalls durch Betrachtung von $\mathrm{Res}_W^{L^\times}$ sieht man: für einen weiteren unzerlegbaren Charakter ν' gilt $\tau_\nu \cong \tau_{\nu'}$ genau dann wenn $\nu = \nu'$ oder $\nu = \overline{\nu'}$. Dies zeigt die Injektivität der linken oberen Abbildung.

Die Surjektivität der linken oberen Abbildung zeigen wir durch Abzählen: es gibt $(q^2-1)-(q-1) = q(q-1)$ unzerlegbare Charaktere.

Andererseits gilt nach dem folgenden Lemma

$$\begin{aligned}
2(q^2-1) &= \sharp W \\
&= \sum_{V \in \mathrm{Irrep}_W} \dim V^2 \\
&= 4\sharp\{V \in \mathrm{Irrep}_W, \dim V = 2\} + \sharp\{V \in \mathrm{Irrep}_W, \dim V = 1\} \\
&= 4\sharp\{V \in \mathrm{Irrep}_W, \dim V = 2\} + 2(q-1)
\end{aligned}$$

es gilt also $\sharp\{V \in \mathrm{Irrep}_W, \dim V = 2\} = \frac{q^2-q}{2}$, dies liefert die behauptete Surjektivität. Hiermit ist der Beweis des Theorems abgeschlossen. □

Lemma 8.42. *W hat $2(q-1)$ Charaktere.*

Beweis. Setzt man in (8.36) alle 4 Möglichkeiten für σ und τ ein, liest man ab, dass die Kommutator-Untergruppe $[W,W]$ gerade $\{z\overline{z}^{-1}, z \in L^\times\}$ ist. Dies stimmt nach Lemma 8.26 gerade mit $\ker(\mathrm{N} : L^\times \to F^\times)$ überein, der Index von $[W,W]$ in W ist also $\sharp W / \sharp \ker \mathrm{N} = 2(q^2-1)/\sharp(L^\times/F^\times) = \frac{2(q^2-1)}{q+1} = 2(q-1)$. □

8.5 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 8.43. Sei

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{F}_q^\times, b \in \mathbf{F}_q \right\}.$$

1. Zeige, dass P ein Normalteiler in der Borel-Gruppe

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ & d \end{pmatrix}, a, d \in \mathbf{F}_q^\times, b \in \mathbf{F}_q \right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$$

ist. Zeige ferner, dass sich B wie folgt als halbdirektes Produkt schreiben lässt:

$$B = P \rtimes \mathbf{F}_q^\times.$$

2. Wir hatten in Satz 4.37 die irreduziblen B-Darstellungen ρ_{ψ_1,ψ_2} sowie $E \otimes \rho_{\psi,1}$ bestimmt. Zeige

$$\mathrm{Irrep}_P = \{\mathrm{Res}_B^P \rho_{\psi,1} \text{ mit } \psi : \mathbf{F}_q \to \mathbf{C}^\times\} \cup \{\mathrm{Res}_B^P E\}$$

und gib die Charaktertafel von P an.

Übungsaufgabe 8.44. Sei

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{F}_q^\times, b \in \mathbf{F}_q \right\} \subset U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ & d \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q).$$

Zeige, dass die $(q-1)$-dimensionale irreduzible P-Darstellung E zur Darstellung

$$\mathrm{Ind}_U^P \psi$$

isomorph ist, wobei

$$\psi : \mathbf{F}_q \to \mathbf{C}^\times$$

eine beliebige *nicht-triviale* eindimensionale Darstellung der (additiven) Gruppe $\mathbf{F}_q$ ist.

Übungsaufgabe 8.45. Beende den Beweis von Satz 8.24: zeige, dass die durch (8.21) und (8.25) vorgegebene Wirkung von $B \cup \{w'\}$ auf $V = \mathrm{Abb}(\mathbf{F}_q^\times, \mathbf{C})$ der Relation (iii) in Lemma 8.22 genügt.

Übungsaufgabe 8.46. Sei V eine kuspidale G-Darstellung. Zeige, dass auch die duale Darstellung V^* kuspidal ist.

Übungsaufgabe 8.47. Sei $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_q)$, $B := \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\}$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Sei $\omega : \mathbf{F}_q^\times \to \mathbf{C}^\times$ ein Gruppenhomomorphismus und V die eindimensionale Darstellung von B gegeben durch

$$\pi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) := \omega(a).$$

Zeige, dass $\mathrm{Ind}_B^G V$ irreduzibel ist wenn $\omega^2 \neq 1$ gilt.

Kapitel 9

Der Artinsche Induktionssatz

Notation 9.1. Sei G eine endliche Gruppe und k ein beliebiger Körper. Insbesondere ist Induktion und Koinduktion für Untergruppen von G identisch, wir schreiben daher nur noch Ind und benutzen auch die Eigenschaften der Koinduktion.

Sei X eine Familie von Untergruppen von G. Induktionstheorem machen eine Aussage über das Bild von

$$\mathrm{Ind}_X : \bigoplus_{H \in X} R(H) \stackrel{\mathrm{Ind}_H^G}{\longrightarrow} R(G).$$

Hierbei ist die Abbildung

$$\mathrm{Ind}_H^G : R(H) \to R(G)$$

definiert als die eindeutige $\mathbf{Z}$-lineare Fortsetzung der Abbildung, die eine irreduzible H-Darstellung V auf $\mathrm{Ind}_H^G V$ abbildet. Ebenso ist Res_H^G definiert. Hierbei nutzen wir die Identifikation $R(G) = \bigoplus_{W \in \mathrm{Irrep}(G)} \mathbf{Z}$ (Folgerung 6.8). (Es ist möglich auf Folgerung 6.8 zu verzichten, indem man zeigt, dass Restriktion und Induktion kurze exakte Sequenzen bewahren. Für die Restriktion ist dies sofort klar, man zeigt außerdem dass die Induktion ein linksexakter Funktor ist sowie die Koinduktion rechtsexakt.)

Lemma 9.2. *Das Bild von* Ind_X *ist ein Ideal in* $R(G)$*. Insbesondere ist* $\mathrm{im}\, \mathrm{Ind}_X = R(G)$ *sobald* 1 *im Bild von* Ind_X *liegt, d.h. sobald*

$$1 = \sum_{H \in X} a_H \mathrm{Ind}_H^G V_H$$

für gewisse $a_H \in \mathbf{Z}$ *und gewisse* $V_H \in \mathrm{Rep}_H$ *(oder auch* Irrep_H*).*

Beweis. Dies folgt aus der Projektionsformel (7.22) (da G endlich ist, stimmen Induktion und Koinduktion überein).

$$\mathrm{Ind}_H^G(V \otimes \mathrm{Res}_G^H W) = \mathrm{Ind}_H^G V \otimes W.$$

In der Tat, für $W \in R(G)$ und $A \in \mathrm{im}\, \mathrm{Ind}_X$, d.h. $A = \sum_{H \in X} \mathrm{Ind}_H^G B_H$ für geeignete $B_H \in R(H)$ gilt

$$A \cdot W = \sum_H \mathrm{Ind}_H^G B_H \otimes W = \sum_H \mathrm{Ind}_H^G (B_H \otimes \mathrm{Res}_G^H W) \in \mathrm{im}\, \mathrm{Ind}_X.$$

□

Mit anderen Worten, um alle Darstellungen durch induzierte Darstellungen (aus Gruppen in X) zu erhalten, genügt es, die triviale Darstellung auf diese Weise zu konstruieren.

9.1 Der Burnside-Ring

Der folgende Beweis des Artinschen Induktionssatz folgt [Ben98]. Das vorliegende Beweisschema eignet sich auch für den Beweis feinerer Sätze wie z.B. dem sog. Brauerschen Induktionssatz. Wir benötigen hierzu den Burnside-Ring. Dieser ist ein "Mengen-statt-k-Vektorräume"-Analogon des Darstellungsrings $R_k(G)$:

Definition 9.3. Der *Burnside-Ring* $b(G)$ ist die freie abelsche Gruppe erzeugt von den Isomorphie-Klassen von endlichen G-Mengen und den Relationen $[A] - [A'] - [A \setminus A']$ für jede endliche G-Menge A und jede G-Teilmenge $A' \subset A$. Wir versehen ihn mit der kommutativen Ringstruktur, die durch $M \cdot N = M \times N$ gegeben ist (hierbei operiert $g \in G$ als $g \cdot (m, n) = (gm, gn)$.)

$$b(G)_{\mathbf{Q}} := b(G) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}.$$

D.h. $b(G)_{\mathbf{Q}}$ ist der $\mathbf{Q}$-Vektorraum, dessen Basis die Isomorphieklassen endlicher G-Mengen ist.

Bemerkung 9.4. Die additive Struktur von $b(G)$ kodiert also die Konjugationsklassen von Untergruppen von G. Die Multiplikation ist interessanter, da sie das Zusammenspiel verschiedener Untergruppen in G (gemäß der Formel in (7.4)) kodiert.

Und nun ein Analogon der Paarung $\langle -,-\rangle$: für eine Untergruppe $H \subset G$ haben wir eine Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi_H : b(G) &\to \mathbf{Z},\\ M &\mapsto |M^H|\end{aligned}$$

Sie ist ein Ring-Homomorphismus, denn für zwei G-Mengen M und N gilt:

$$\begin{aligned}(M \times N)^H &= M^H \times N^H,\\ (M \sqcup N)^H &= M^H \sqcup N^H.\end{aligned}$$

Definition 9.5. Wir schreiben $C(G)$ für die Menge der Untergruppen $H \leq G$ bis auf Konjugation, d.h. H wird mit allen gHg^{-1} identifiziert. (Nach Satz 7.3 besteht eine Bijektion von $C(G)$ zur Menge der Isomorphieklassen endlicher unzerlegbarer G-Mengen, d.h. $C(G)$ ist das Mengen-Analogon von $\mathrm{Irrep}_k(G)$.)

Lemma 9.6. *(Burnside, 1911) Sei G eine endliche Gruppe. Die Abbildung*

$$\varphi := (\bigoplus \varphi_H) : b(G) \to \bigoplus_{H \in C(G)} \mathbf{Z}$$

ist ein injektiver Ring-Homomorphismus. (Multiplikation und Addition im Ring auf der rechten Seite sind komponentenweise definiert.) Zwei endliche G-Mengen X, Y sind also isomorph genau dann, wenn $|X^H| = |Y^H|$ für alle $H \leq G$ gilt.

Die induzierte Abbildung

$$b(G)_{\mathbf{Q}} \to \bigoplus_{H \in C(G)} \mathbf{Q}$$

ist ein Ring-Isomorphismus.

Beweis. Sei $x \neq 0$, $x \in \ker \varphi$. Wir schreiben $x = \sum_H a_H[G/H]$. Wir führen eine partielle Ordnung $\leq$ auf den G-Mengen der Form G/H ein, nämlich durch

$$G/H \leq G/K \overset{Definition}{\Leftrightarrow} \exists g \in G : gHg^{-1} \subset K.$$

Satz 7.3 besagt: $G/H \leq G/K$ genau dann, wenn es eine Abbildung (von G-Mengen) $G/H \to G/K$ gibt. Dies ist auch noch äquivalent dazu, dass $(G/K)^H \neq \emptyset$. Sei G/H maximal bezüglich dieser Ordnung so dass $a_H \neq 0$. Wegen der Maximalität von G/H gilt also $0 = \varphi_H(x) = a_H|(G/H)^H| = a_H|N_G(H)/H|$.

Die letzte Aussage folgt hieraus, da es beide $\mathbf{Q}$-Vektorräume die gleiche (endliche) Dimension haben. □

9.2 Der Artinsche Induktionssatz

Wir betrachten im folgenden nur *komplexe* Darstellungen (d.h. $k = \mathbf{C}$ in der Notation der vorigen Kapitel), d.h. $R(G)$ bezeichnet den Darstellungsring der komplexen (endlich-dimensionalen) G-Darstellungen. Wir schreiben

$$R(G)_{\mathbf{Q}} := R(G) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}.$$

Theorem 9.7. *(*Artinscher Induktionssatz*) Die Abbildung*

$$\bigoplus_{H \in C(G), H \text{ zyklisch}} R(H)_{\mathbf{Q}} \overset{\mathrm{Ind}_H^G}{\longrightarrow} R(G)_{\mathbf{Q}}$$

ist surjektiv. D.h. für jede G-Darstellung V gibt es ein $n \geq 1$, so dass für geeignete H-Darstellungen W_H und $n_H \in \mathbf{Z}$ in $R(G)$ folgende Gleichheit gilt:

$$V^{\oplus n} = \sum_{H \text{ zyklisch}} n_H \mathrm{Ind}_H^G(W_H).$$

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} b(G) & \xrightarrow{\varphi} & \bigoplus_{H \in C(G)} \mathbf{Z} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ R(G) & \xrightarrow{\chi} & Z(\mathbf{C}G) = \bigoplus_{C \subset G \text{Konjugationsklasse}} \mathbf{C} \end{array}$$

Die linke vertikale Abbildung α ordnet jeder G-Menge X die Permutationsdarstellung $k[X]$ zu. Die rechte Abbildung ψ schickt e_H (den Standardbasisvektor der bei H 1 ist und sonst 0) auf $\sum_{g\in G,\langle g\rangle\sim H} e_g$, wobei $\sim$ bedeutet, dass die beiden Untergruppen zueinander konjugiert sind und $\langle g\rangle$ die von g erzeugte zyklische Untergruppe von G ist. Die untere Abbildung ist gegeben durch $V\mapsto \chi_V$.

Das Diagramm kommutiert: für $X = G/K$ wird $\varphi(G/K) = \sum_H |(G/K)^H| e_H$ auf

$$\sum_{g\in G,\langle g\rangle\sim H} (G/K)^H = \sum_{\text{Konjugationsklassen von } g\in G} (G/K)^{\langle g\rangle} e_g$$

abgebildet. Nun ist $(G/K)^{\langle g\rangle}$ gerade die Menge der unter g fixen Elemente in G/K, dies ist auch die Spur von g auf $k[G/K]$, d.h. $\chi_{k[G/K]}(g)$.

Sei $H\subset G$ eine zyklische Untergruppe. Schreiben wir $\varphi(G/H) = \sum_{K\in C(G)} a_K e_K$, so ist $a_K = (G/H)^K \neq 0$ nur falls $K\subset gHg^{-1}$, d.h. insbesondere nur für zyklische K ist $a_K\neq 0$. Da $\varphi_{\mathbf{Q}}$ surjektiv ist, können wir also $e_H = \varphi(\sum_{K \text{ zyklisch, subkonjugiert zu } H} a_K[G/K])$ mit geeigneten $a_K\in\mathbf{Q}$ schreiben.

In $\bigoplus_H \mathbf{Z}$ gilt $1 = \sum_{H\in C(G)} e_H$ und Anwenden von ψ liefert folgende Identität in $Z(\mathbf{C}G)$

$$1 = \sum_{H\in C(G), H \text{ zyklisch}} \psi(e_H) = \sum_{K \text{ zyklisch}} a_K\psi\varphi(G/K) = \sum_K a_K\chi_{\mathbf{C}[G/K]}.$$

Die Abbildung

$$\chi : R(G)\otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to Z(\mathbf{C}G)$$

ist jedoch nach Folgerung 5.13 ein Isomorphismus und insbesondere injektiv. Damit ist auch $\chi : R(G)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}\to Z(\mathbf{C}G)$ injektiv, so dass wir folgende Identität in $\mathbf{R}(G)_{\mathbf{Q}}$ erhalten:

$$1 = \sum_{K \text{ zyklisch}} a_K\mathbf{C}[G/K] = \sum_K a_K \mathrm{Ind}_K^G 1.$$

Aus Lemma 9.2 folgt nun die behauptete Surjektivität. □

Bemerkung 9.8. Im Fall char$k>0$ kann man den sog. *Brauer-Charakter* χ_V einer G-Darstellung definieren auf den p-regulären Elementen. In diesem Fall lautet Artins Satz (mit dem gleichen Beweis), dass $\mathrm{Ind}_X\otimes\mathbf{Q}$ surjektiv ist, wenn man für X die p-regulären zyklischen Untergruppen wählt (d.h. die zyklischen Untergruppen, deren Ordnung prim zu p ist).

Kapitel 10

Arithmetische Aspekte

Wir haben bisher irreduzible Darstellungen folgender Gruppen bestimmt:

Gruppe G	$\sharp G$	$\dim W, W \in \mathrm{Irrep}_G$
$\mathbf{Z}/n$	n	1
Quaternionengruppe Q_8	8	1, 2 (Übungsaufgabe 4.46)
S_3	6	1, 2
S_4	24	1, 3 (Übungsaufgabe 4.49)
Borelgruppe $B := \left\{\begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix}\right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$	$(q-1)^2 q$	1, $q-1$ (Satz 4.37)
$\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$	$q(q-1)^2(q+1)$	1, q, $q+1$ (Hauptreihendarstellung)
		$q-1$ (kuspidale Darstellungen)

Die Beobachtung, dass $\dim W | \sharp G$ in allen diesen Fällen gilt, gilt sogar ganz allgemein:

Theorem 10.1. *Sei G eine endliche Gruppe. Dann gilt*

$$\dim W | \sharp G$$

für jede irreduzible komplexe G-Darstellung W.

Um eine solche Teilbarkeitsaussage zu zeigen, unternehmen wir einen kleinen Ausflug in die algebraische Zahlentheorie. Es sei daran erinnert, dass $\overline{\mathbf{Q}}$ den Körper der algebraischen Zahlen bezeichnet. Man kann ihn z.B. auffassen als den Teilkörper der $z \in \mathbf{C}$, so dass

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \tag{10.2}$$

gilt, mit geeigneten $a_i \in \mathbf{Q}$, die nicht alle 0 sind. Man bezeichnet $p(t) := t^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$ als *monisches Polynom*, da der Leitkoeffizient 1 ist.

Definition und Lemma 10.3. Für $z \in \overline{\mathbf{Q}}$ sind äquivalent:

(i) Es gibt ein *monisches* Polynom $p(t) \in \mathbf{Z}[t]$ (d.h. die $a_k \in \mathbf{Z}$) mit $p(z) = 0$.

(ii) Es gibt ein *Gitter*, d.h. eine freie abelsche Gruppe Λ mit endlichem Rang (d.h. $\Lambda \cong \mathbf{Z}^n$) sowie einen Endomorphismus $f : \Lambda \to \Lambda$ derart, dass x ein Eigenwert der induzierten Abbildung $f \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{Q}} : \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{Q}} \to \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{Q}}$ (von $\overline{\mathbf{Q}}$-Vektorräumen) ist.

Eine solche Zahl z heißt *algebraische ganze Zahl*. Wir bezeichnen die Menge dieser Zahlen mit $\mathcal{O}$.

Beispiel 10.4. Die n-ten Einheitswurzeln ζ liegen in $\mathcal{O}$, denn sie sind Nullstellen des Polynoms $t^n - 1$.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Wähle eine Basis von Λ und schreibe f als Matrix (mit *ganzzahligen* Einträgen). Die Eigenwerte von $f \otimes \overline{\mathbf{Q}}$ sind also Eigenwerte des charakteristischen Polynoms $\det(f - t\mathrm{id})$, welches ein monisches Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist.

(i) $\Rightarrow$ (ii): z erfülle eine Gleichung der Form (10.2) mit $a_k \in \mathbf{Z}$. Sei $\Lambda := \mathbf{Z}^n$ und betrachte den Endomorphismus f, der zur $n \times n$-Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gehört. Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist $p(t) = \det(t\mathrm{id} - M) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$, wie man jeweils durch Addieren des $\frac{1}{t}$-fachen einer Zeile zur nächstfolgenden Zeile sofort nachprüft, d.h. z ist eine Nullstelle von p. □

Satz 10.5. *Die Teilmenge $\mathcal{O} \subset \overline{\mathbf{Q}}$ ist ein Unterring (jedoch kein Körper). Es gilt*

$$\mathcal{O} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Z},$$

d.h. jede algebraische ganze Zahl, die überdies rational ist, ist eine ganze Zahl.

Beweis. Seien $x, y \in \mathcal{O}$. Wähle Paare eines Gitters mit einem Endomorphismus wie in (ii): (Λ, f), $\Lambda', f')$. Dann ist xy ein Eigenwert von $f \otimes f'$ auf $\Lambda \otimes \Lambda'$. Ferner ist $x + y$ ein Eigenwert von $f \otimes \mathrm{id}_{\Lambda'} + \mathrm{id}_\Lambda \otimes f'$ auf $\Lambda \otimes \Lambda'$.

Die Enthaltenseinsrelation $\mathbf{Z} \subset \mathcal{O} \cap \mathbf{Q}$ ist klar ($t - n$ hat $n \in \mathbf{Z}$ als Nullstelle). Die umgekehrte Relation wird auch als *Gaußsches Lemma* bezeichnet: sei $z = \frac{r}{s}$ mit teilerfremden $r, s \in \mathbf{Z}$ und $p(z) = 0$ wie in (10.2) mit $a_k \in \mathbf{Z}$. Dann folgt

$$-r^n = s\left(a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_0 s^{n-1}\right).$$

Da s zu r und damit zu r^n teilerfremd ist, folgt $s = \pm 1$, d.h. $z \in \mathbf{Z}$. □

Der Ring $\mathcal{O}$ ist insofern für uns relevant als wir zeigen werden, dass $\frac{\sharp G}{\dim V} \in \mathcal{O}$ (und natürlich in $\mathbf{Q}$) und damit in $\mathbf{Z}$ ist. Zunächst halten wir fest:

Satz 10.6. *Für jede (endlich-dimensionale) G-Darstellung $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ und jedes $g \in G$ ist $\pi(g)$ eine diagonalisierbare Matrix deren Eigenwerte eine $\sharp G$-te Einheitswurzel sind. Insbesondere ist ihre Summe, d.h. $\chi_V(g)$ (wegen Satz 10.5 und Beispiel 10.4) in $\mathcal{O}$.*

Beweis. Sei $n := \sharp G$. Dann gilt $g^n = 1$, also $\pi(g)^n = \mathrm{id}_V$. Das Minimalpolynom $f(t)$ von $\pi(g)$ ist also ein Teiler von $t^n - 1$. Dieses Polynom ist separabel (wie jedes komplexe Polynom), hat also nur einfache Nullstellen. Also hat auch $f(t)$ nur einfache Nullstellen. $\pi(g)$ ist also diagonalisierbar (andernfalls hätte es einen $n \times n$-Jordanblock (mit $n > 1$) der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

und f hätte einen Faktor der Form $(t - \lambda)^n$). Die Nullstellen von f sind überdies alles n-te Einheitswurzeln. □

Lemma 10.7. *Sei $\varphi : A \to \overline{\mathbf{Q}}$ ein Ringhomomorphismus, wobei A als abelsche Gruppe endlich erzeugt ist. Dann gilt $\varphi(A) \subset \mathcal{O}$.*

Beweis. Sei $x \in \varphi(A)$. Die Elemente $1, x, x^2, \dots$ erzeugen eine Untergruppe von $\varphi(A) = A/\ker\varphi$, welche als Untergruppe einer endlich erzeugten Gruppe wieder endlich erzeugt ist. D.h. es gibt $k \in \mathbf{N}$ so dass x^k in der von $1, x, \dots, x^{k-1}$ erzeugten Untergruppe liegt, d.h. x^k genügt einer Ganzheitsgleichung wie in (10.2) (mit $a_k \in \mathbf{Z}$). □

Satz 10.8. *Sei V eine irreduzible G-Darstellung. Sei $g \in G$ und betrachte die Konjugationsklasse $C := C_g = \{xgx^{-1}, x \in G\}$ von g. Dann gilt*

$$\frac{\sharp C}{\dim V}\chi_V(g) \in \mathcal{O}.$$

Beweis. Sei

$$F : \mathbf{C}G \to \prod_{W \in \mathrm{Irrep}_G} \mathrm{End}(W)$$

die Fourier-Transformation. Wir hatten für $g \in G$ mit Konjugationsklasse $C := C_g$ im Zuge von Satz 5.16 die Basisvektoren $b_C := \frac{1}{\sharp C}\sum_{g \in C} e_g$ von $Z(\mathbf{C}G)$ definiert und gezeigt:

$$F(b_C) = \frac{1}{\sharp C}\left(\sum_{g \in C} W \xrightarrow{g} W\right)_{W \in \mathrm{Irrep}_G} = \left(\frac{1}{\dim W}\chi_W(g)\mathrm{id}_W\right)_{W \in \mathrm{Irrep}_G}.$$

Die Fourier-Transformation liefert einen Ring-Homomorphismus

$$L : Z(\mathbf{C}G) \xrightarrow{F} \prod_{W \in \mathrm{Irrep}_G} Z(\mathrm{End} W) \to Z(\mathrm{End}(V)) \xrightarrow{\cong} \mathbf{C}.$$

Hierbei ist der rechte Isomorphismus gemäß dem Lemma von Schur gegeben durch $\mathrm{End}(V) \ni r \mapsto \mathrm{tr}(r)/\dim V$.

Sei $\mathbf{Z}G$ der sog. *ganzzahlige Gruppenring*, d.h.

$$\mathbf{Z}G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g e_g, a_g \in \mathbf{Z} \right\} \subset \mathbf{C}G.$$

Bezeichne mit $Z_{int} := Z(\mathbf{C}G) \cap \mathbf{Z}G$, d.h. die Linearkombinationen $\sum a_g e_g$ so dass die $a_g \in \mathbf{Z}$ und konstant auf den Konjugationsklassen sind. Diese abelsche Gruppe hat eine Basis bestehend aus den Vektoren $b'_C := \sharp C b_C = \sum_{g \in C} e_g$, wobei $C \subset G$ die Konjugationsklassen in G durchläuft. Wir erhalten einen Ringhomomorphismus

$$L : Z_{int} \to \mathbf{C},$$

der b'_C auf $\frac{\sharp C}{\dim V} \chi_V(g)$ abbildet. Dies liegt nach Satz 10.6 in $\overline{\mathbf{Q}}$. Da Z_{int} als abelsche Gruppe endlich erzeugt ist, nimmt L nach Lemma 10.7 sogar Werte in $\mathcal{O}$ an, d.h.

$$L(b'_C) = \frac{\sharp C}{\dim W} \chi_W(g) \in \mathcal{O}.$$

$\square$

Beweis. (von Theorem 10.1). Laut der 1. Orthogonalitätsrelation (Satz 4.31) gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sharp G}{\dim V} &= \sum_{g \in G} \frac{\chi_V(g)}{\dim V} \chi_{V^*}(g) \\ &= \sum_{\text{Konj.klassen } C_g} \left(\frac{\sharp C_g}{\dim V} \chi_V(g) \right) \chi_{V^*}(g). \end{aligned}$$

Laut Satz 10.8 und Satz 10.6 liegt dies in $\mathcal{O}$, also nach dem Gaußschen Lemma auch in $\mathbf{Z}$. $\square$

Literaturverzeichnis

[Bau06] Benjamin Baumslag. A simple way of proving the Jordan-Hölder-Schreier theorem. *Amer. Math. Monthly*, 113(10):933–935, 2006.

[Ben98] D. J. Benson. *Representations and cohomology. I*, volume 30 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1998. Basic representation theory of finite groups and associative algebras.

[Bum13] Daniel Bump. *Lie groups*, volume 225 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.

[CSST18] Tullio Ceccherini-Silberstein, Fabio Scarabotti, and Filippo Tolli. *Discrete harmonic analysis*, volume 172 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2018. Representations, number theory, expanders, and the Fourier transform.

[GJ09] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. Reprint of the 1999 edition [MR1711612].

[HKR00] Michael J. Hopkins, Nicholas J. Kuhn, and Douglas C. Ravenel. Generalized group characters and complex oriented cohomology theories. *J. Amer. Math. Soc.*, 13(3):553–594, 2000.

[Hum08] James E. Humphreys. Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$. 94:xvi+289, 2008.

[Kow14] Emmanuel Kowalski. *An introduction to the representation theory of groups*, volume 155 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[Liu80] Arunas Liulevicius. Arrows, symmetries and representation rings. *J. Pure Appl. Algebra*, 19:259–273, 1980.

[PS83] Ilya Piatetski-Shapiro. *Complex representations of* $\mathrm{GL}(2, K)$ *for finite fields* K, volume 16 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1983.

[Ree14] Mark Reeder. Notes on representations of finite groups. https://www2.bc.edu/mark-reeder/RepThy.pdf, 2014.

[Sch13] Peter Schneider. *Modular representation theory of finite groups*. Springer, Dordrecht, 2013.

[Ser78] Jean-Pierre Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, revised edition, 1978.

[Web00] Peter Webb. A guide to Mackey functors. In *Handbook of algebra, Vol. 2*, volume 2 of *Handb. Algebr.*, pages 805–836. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2000.

Index