

# Algebraische Topologie für Lehramtsstudierende

Jakob Scholbach

1. Juli 2020



# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>0</b> | <b>Vorbemerkung</b>   | <b>5</b>  |
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>7</b>  |
| <b>2</b> | <b>Topologische Grundbegriffe</b>                           | <b>9</b>  |
| 2.1      | Stetigkeit . . . . .  | 9         |
| 2.2      | Kompaktheit, Zusammenhang und Homöomorphie . . . . .        | 12        |
| 2.3      | Übungsaufgaben . . . . .                                    | 19        |
| <b>3</b> | <b>Die Fundamentalgruppe</b>                                | <b>23</b> |
| 3.1      | Die Windungszahl . . . . .                                  | 23        |
| 3.2      | Homotopie von Pfaden und Schleifen . . . . .                | 32        |
| 3.3      | Komposition von Schleifen . . . . .                         | 38        |
| 3.4      | Abstrakte Gruppen . . . . .                                 | 43        |
| 3.5      | Die Fundamentalgruppe von $S^1$ . . . . .                   | 47        |
| 3.6      | Die Fundamentalgruppe von $S^2$ . . . . .                   | 51        |
| 3.7      | Topologische Invarianz der Dimension . . . . .              | 54        |
| 3.8      | Ein Ausblick in höhere Dimensionen . . . . .                | 57        |
| 3.9      | Übungsaufgaben . . . . .                                    | 58        |
| <b>4</b> | <b>Der Satz von van Kampen</b>                              | <b>67</b> |
| 4.1      | Verknotete und nicht verknotete Ringe – Überblick . . . . . | 67        |
| 4.2      | Freie Produkte von Gruppen . . . . .                        | 73        |
| 4.3      | Gruppentheoretische Grundbegriffe . . . . .                 | 78        |
| 4.4      | Der Satz von van Kampen . . . . .                           | 82        |
| 4.5      | Der Beweis des Satzes von van Kampen . . . . .              | 86        |
| 4.6      | Übungsaufgaben . . . . .                                    | 89        |
|          | <b>Literatur</b>  | <b>92</b> |



# Kapitel 0

## Vorbemerkung

Dies sind im Entstehen begriffene Vorlesungsnotizen einer Vorlesung für Lehramtsstudierende an der Universität Münster. Grundlegende Vorkenntnisse aus der Linearen Algebra und der Analysis, wie sie jeweils im ersten und zweiten Semester erworben werden, sind für das Verständnis des Stoffes hier notwendig.

- Das Ausrufezeichen-Symbol (!) weist auf Punkte hin, die im Nacharbeiten der Vorlesung beachtet werden können und sollten; oft sind dort einige kleinere Aspekte eines Begriffs zu wiederholen.
- Die drei Punkte am Rand stehen für Inhalte, die in der Vorlesung erklärt werden.
- Das Videozeichen am Rand verweist auf die Videoaufzeichnungen der Vorlesung.



[Video 21.04.20](#)





# Kapitel 1

## Einleitung

*Topologie* ist ein Teilgebiet der Mathematik welches sich mit geometrischen Strukturen befasst, wobei das Interesse nicht so sehr in der genauen Form der geometrischen Objekte liegt, sondern eher darin, ob sich z.B. zwei gegebene geometrische Objekte ineinander verformen lassen. Beispielsweise kann man – wie man sagt, und wie wir im folgenden noch präzisieren werden, – eine Tasse mit einem Henkel *stetig* in einen Donut verformen. Hingegen ist es zumindest intuitiv einleuchtend, dass zwei Kettenglieder (oder zwei Eheringe in der üblichen Darstellung) nicht voneinander gelöst werden können, ohne sie z.B. zu zerschneiden. Außerdem ist es einleuchtend, aber wiederum gar nicht so leicht direkt zu beweisen, dass man einen Donut nicht *stetig* in eine Kugel deformieren kann.

Video 21.04.20



*Algebraische Topologie* ist ein Teilgebiet der Topologie, welches die obigen und weitere Fragen dieser Art löst, indem man solchen geometrischen Objekten algebraische Informationen zuweist. Im einfachsten Fall sind dies ganze Zahlen oder Vektorräume, aber auch andere algebraische Daten wie z.B. Gruppen.

Der Nutzen ist hierbei, dass diese algebraischen Daten leichter zu beschreiben sind, und mit ihrer Hilfe gezeigt werden kann, dass gewisse topologische Probleme eine Lösung oder eben keine Lösung besitzen.

All diese Ideen werden wir im folgenden kennen lernen. Wir werden

- die Frage präzisieren, was wir z.B. meinen, wenn wir behaupten, dass ein Donut nicht stetig in eine Kugel deformiert werden kann,
- algebraische Grundbegriffe (wie z.B. den Begriff der Gruppe) kennen lernen,
- verstehen, wie wir geometrische Fragestellungen in algebraische Fragestellungen übersetzen, und
- auf diesem Weg die obigen (und weitere) Fragen lösen.

An dieser Stelle seien zunächst zur Illustration einige Theoreme erwähnt, die mit Mitteln der (algebraischen) Topologie gezeigt werden können.

Den ersten Satz kennen wir bereits aus der Analysis-Vorlesung; an seinem Beispiel werden wir bald einige topologische Grundbegriffe kennen lernen.

**Theorem 1.1.** (*Zwischenwertsatz*) Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(0) =: a$  und  $f(1) =: b$ . Für jedes  $y \in [a, b]$  gibt es dann ein  $x \in [0, 1]$  so, dass

$$f(x) = y$$

gilt.

Ebenfalls aus der Analysis bekannt ist die sog. *Peano-Kurve*, eine Abbildung

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2,$$

die stetig und surjektiv ist. Sie ist jedoch nicht injektiv.

**Theorem 1.2.** (*Topologische Invarianz der Dimension*) Es gibt keine stetige bijektive Abbildung

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2.$$

Ein drittes Theorem, welches wiederum eher dem Zwischenwertsatz ähnelt insofern als beide Sätze die Existenz der Lösung einer Gleichung bzw. eines Gleichungssystems liefern:

**Theorem 1.3.** (*Satz von Borsuk–Ulam*) Es gibt auf der Erde stets zwei gegenüberliegende Punkte, an denen sowohl die Temperatur als auch der Luftdruck genau übereinstimmen.

Mit etwas formalerer Notation: gegeben seien zwei stetige Funktionen

$$f, g : S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \rightarrow \mathbf{R}.$$

Dann gibt es (mindestens) einen Punkt  $(x, y, z) \in S^2$  mit

$$f((x, y, z)) = f((-x, -y, -z)) \text{ und } g((x, y, z)) = g((-x, -y, -z)).$$

**Frage 1.4.** Gegeben ist eine Medaille, die an einem Halsband befestigt ist, sowie außerdem zwei Nägel, die in der Wand befestigt sind. Wie muss das Band um die Nägel schlingen so dass:

- die Medaille nicht herunter fällt, aber
- sobald man *den einen oder den anderen* Nagel aus der Wand entfernt, fällt die Medaille jeweils herunter?

Diese Frage werden wir lösen und gründlicher verstehen, indem wir das Konzept der sog. *Fundamentalgruppe* einführen. Die Idee hiervon ist folgende: betrachte die Ebene (als Modell für die Wand), aus der wir zwei verschiedene Punkte  $p$  und  $q$  (die Nägel) entfernen:

$$X := \mathbf{R}^2 \setminus \{p, q\}.$$

Wir suchen eine Schleife  $\gamma$  (so wie z.B. das Band), die in  $X$  verläuft mit den Eigenschaften:

- $\gamma$  lässt sich nicht *stetig* zusammenziehen, sofern wir verlangen, dass im Zuge des Zusammenziehens die Punkte  $p$  und  $q$  nicht übertreten werden dürfen. (Dies korrespondiert dazu, dass die beiden Nägel das Band aufhalten sollen.)
- $\gamma$  lässt sich stetig zusammenziehen, sobald wir erlauben dass im Zuge dessen  $p$  oder  $q$  übertreten wird (d.h. wenn wir den Nagel bei  $p$  oder  $q$  entfernen, fällt das Band herunter).

Nach dieser ungemein praktischen Anwendung der algebraischen Topologie, die in jeder guten Hausmeisterausbildung eine Rolle spielt, hier eine innermathematische Anwendung:

**Theorem 1.5.** (*Fundamentalsatz der Algebra*, siehe Kapitel 3 für den Beweis) Sei

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

ein nicht konstantes Polynom, wobei die Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n$  reelle oder sogar allgemeiner komplexe Zahlen sind. Dann gibt es eine komplexe Zahl  $x \in \mathbf{C}$  mit

$$f(x) = 0.$$

Die Bezeichnung dieses Satzes als *Fundamentalsatz der Algebra* ist insofern irreführend als dass der Satz rein innerhalb der Algebra, d.h. ohne Verwendung topologischer Eigenschaften der komplexen Zahlen, nicht bewiesen werden kann. Wir werden einen Beweis kennen lernen, der aus den Methoden resultiert, mit dem wir auch die anderen Fragen und Theoreme lösen. Die Grundidee hierbei ist, die sog. Fundamentalgruppe von  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  zu berechnen. Diesen Begriff und auch Methoden die Fundamentalgruppe zu berechnen werden wir zu gegebener Zeit gründlich entwickeln, im Moment sei nur die Ähnlichkeit zum Problem des Aufhängens der Medaille erwähnt.



# Kapitel 2

## Topologische Grundbegriffe

Um die Fragestellungen in der Einleitung überhaupt erst einmal präzise zu formulieren und später auch zu bearbeiten, verschaffen wir uns in diesem Kapitel einiges Handwerkszeug.

### 2.1 Stetigkeit

#### 2.1.1 Stetigkeit in $\mathbf{R}^n$

Das entscheidende Wort im Zwischenwertsatz (Theorem 1.1) und auch allen anderen Aussagen im vorigen Kapitel ist das Wort “stetig”. In der Analysis-Vorlesung wird dieser Begriff wie folgt definiert:

**Definition 2.1.** Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ , wobei  $U \subset \mathbf{R}^n$  eine Teilmenge ist, heißt *stetig an einem fixierten Punkt*  $x \in U$ , wenn das sog.  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium gilt, d.h. wenn gilt:

für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  so dass für jeden Punkt  $y \in U$  mit  $|x - y| < \delta$  auch  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  gilt.

Die Funktion  $f$  heißt (überall) *stetig*, wenn sie an jedem Punkt  $x \in U$  stetig ist.

Hierbei ist für  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{R}^n$  (wie z.B.  $z = x - y$ , und analog für  $z = f(x) - f(y)$ )

$$|z| := \sqrt{z_1^2 + \dots + z_n^2}.$$

Ebenfalls bekannt ist folgende Sprechweise:

**Definition 2.2.** Sei  $x \in \mathbf{R}^n$  und  $\epsilon > 0$ . Die Teilmenge

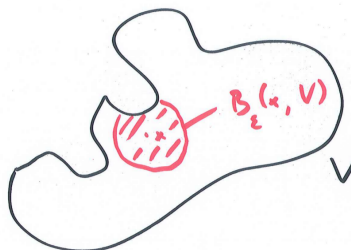
$$B_\epsilon(x) := \{y \in \mathbf{R}^n, |x - y| < \epsilon\}$$

heißt  $\epsilon$ -Ball um  $x$  oder auch  $\epsilon$ -Umgebung von  $x$ .

Für den Fall, dass wir Stetigkeit von Funktionen betrachten wollen, die nicht auf ganz  $\mathbf{R}^n$  definiert sind, ergänzen wir dies durch folgende Definition:

**Definition 2.3.** Sei  $V \subset \mathbf{R}^n$  eine Teilmenge sowie  $x \in V$ . Der  $\epsilon$ -Ball um  $x$  in  $V$  ist die Teilmenge

$$B_\epsilon(x, V) := B_\epsilon(x) \cap V.$$



Mit dieser Sprechweise kann Definition 2.1 auch folgendermaßen formuliert werden:  $f : V \rightarrow \mathbf{R}^m$  ist genau dann stetig, wenn für jeden Punkt  $x \in V$  und jede  $\epsilon$ -Umgebung  $B_\epsilon(f(x))$  von  $f(x)$  (mit beliebigem  $\epsilon > 0$ ) es eine  $\delta$ -Umgebung  $B_\delta(x, V)$  von  $x$  in  $V$  gibt (mit geeignetem  $\delta > 0$ ) so dass

$$B_\delta(x, V) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x))). \quad (2.4)$$

In der Tat: diese Inklusion bedeutet, dass jedes  $y \in V$  mit  $|x - y| < \delta$  in  $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$  liegt, d.h.  $f(y) \in B_\epsilon(f(x))$ , d.h.  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .

Stetigkeit (welche ja die Schlüsselvoraussetzung in Theorem 1.1 ist!) ist also eine Eigenschaft, die nur über die  $\epsilon$ -Umgebungen charakterisiert werden kann. Diese Umformulierung ist immer noch ein wenig sperrig, wir definieren daher:

**Definition 2.5.** Sei  $V \subset \mathbf{R}^n$  eine Teilmenge. Wir nennen eine Teilmenge  $U \subset V$  *offen in  $V$* , wenn gilt: für jedes  $x \in U$  gibt es ein  $\epsilon > 0$  so dass die gesamte  $\epsilon$ -Umgebung noch in  $U$  enthalten ist, d.h. so, dass

$$B_\epsilon(x, V) \subset U$$

gilt.

Der Radius  $\epsilon$  darf (und wird in aller Regel) von dem Punkt  $x \in U$  abhängen. Falls  $V = \mathbf{R}^n$ , so sagen wir nur kurz, dass  $U$  offen ist (d.h. offen bedeutet offen in  $\mathbf{R}^n$ ).

**Lemma 2.6.** Sei  $V \subset \mathbf{R}^n$  eine Teilmenge und  $f : V \rightarrow \mathbf{R}^m$  eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1)  $f$  ist stetig (im Sinne der Definition 2.1 oder auch im Sinne der obigen äquivalenten Umformulierung mittels der  $\epsilon$ -Bälle).

(2) Für jede offene Teilmenge  $U \subset \mathbf{R}^m$  ist das Urbild  $f^{-1}(U)$  offen in  $V$  (im Sinne der Definition 2.5).

In kurzen Worten: eine Funktion ist stetig genau dann, wenn Urbilder offener Mengen wieder offen sind.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Sei  $U \subset \mathbf{R}^m$  offen. Wir zeigen, dass  $f^{-1}(U)$  in  $V$  offen ist. Sei hierzu  $v \in f^{-1}(U)$ , d.h.  $f(v) \in U$ . Da  $U$  offen ist, gibt es einen  $\epsilon$ -Ball  $B_\epsilon(f(v)) \subset U$  (für genügend kleines  $\epsilon > 0$ ). Anwenden von  $f^{-1}$  liefert die Inklusion

$$f^{-1}(B_\epsilon(f(v))) \subset f^{-1}(U).$$

Nach dem  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium für Stetigkeit (in der Formulierung um (2.4)) gibt es ein  $\delta > 0$  so dass  $B_\delta(v, V) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(v)))$  und damit insgesamt

$$B_\delta(v, V) \subset f^{-1}(U).$$

Folglich ist  $f^{-1}(U)$  offen.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Wir zeigen, dass  $f$  in einem beliebigen Punkt  $x \in V$   $\epsilon$ - $\delta$ -stetig ist. Sei hierzu  $\epsilon > 0$ . Das Urbild von  $B_\epsilon(f(x))$  ist offen (und enthält  $x$ ), d.h. es gibt eine in  $V$  offene Umgebung  $f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \supset U \ni x$ . Nach Definition der offenen Mengen gibt es also ein  $\delta > 0$  so dass  $U \supset B_\delta(x, V) \ni x$ . Wir erhalten also genau die Bedingung in (2.4).  $\square$

### 2.1.2 Stetigkeit in topologischen Räumen

Definition 2.1 ist für die Belange der Analysis gut geeignet, nicht jedoch so sehr für die Topologie, wo der genaue Abstand zweier Punkte nicht so relevant ist. Lemma 2.6 gibt eine Umformulierung der Stetigkeit einer Funktion, die sich sehr weitreichend verallgemeinern lässt. Wir halten hierzu folgende Eigenschaften offener Mengen (im Sinne von Definition 2.5) fest:

**Lemma 2.7.** (1)  $\emptyset, \mathbf{R}^n$  sind offen (in  $\mathbf{R}^n$ ),

(2) Falls  $U, U'$  offen sind, so ist es auch  $U \cap U'$ .

(3) Falls  $U_i$  offene Mengen sind, wobei  $i \in I$  eine beliebige Indexmenge durchläuft, so ist auch  $\bigcup_{i \in I} U_i$  offen.

ⓘ *Beweis.* Wir zeigen nur den dritten Punkt, die übrigen beiden sind eine Übungsaufgabe(!). Seien die  $U_i$  offen und  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ . Es gibt dann ein  $i \in I$  so dass  $x \in U_i$  liegt. Da dieses  $U_i$  offen ist, enthält  $U_i$  noch einen Ball:  $B_\epsilon(x) \subset U_i$  für ein  $\epsilon > 0$ . Es folgt dann  $B_\epsilon(x) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ , d.h. die Vereinigung der  $U_i$  ist ebenfalls offen.  $\square$

Dieses Lemma motiviert folgendes:

Video 24.04.20

**Definition 2.8.** Sei  $X$  eine Menge. Eine *Topologie*  $\mathcal{U}$  ist eine Menge von Teilmengen von  $X$ , so dass folgendes gilt:

- (1)  $\emptyset \in \mathcal{U}$ ,  $X \in \mathcal{U}$ ,
- (2) für beliebige  $U, U' \in \mathcal{U}$  ist auch  $U \cap U' \in \mathcal{U}$ , und
- (3) für beliebige  $U_i \in \mathcal{U}$ , wobei  $i \in I$  eine beliebige (möglicherweise unendliche!) Indexmenge durchläuft, ist auch

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

wieder in  $\mathcal{U}$ .

Man bezeichnet die Elemente in  $\mathcal{U}$  auch als *offene Mengen*, wobei dies in dieser Allgemeinheit nur eine Sprechweise darstellt. Mit dieser Sprechweise kann man sagen: die leere Menge sowie ganz  $X$  müssen “offen” sein, der Durchschnitt zweier “offener” Mengen ist wieder offen und beliebige Vereinigungen “offener” Mengen sind wieder offen. Man nennt eine Teilmenge  $Z \subset X$  *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement  $X \setminus Z$  “offen” ist, d.h. wenn  $X \setminus Z$  in  $\mathcal{U}$  liegt.

Ein *topologischer Raum* ist eine Menge  $X$ , die mit einer *Topologie*  $\mathcal{U}$  versehen ist. Um die Wahl der Topologie zu betonen schreiben wir auch  $(X, \mathcal{U})$ , ansonsten kurz einfach nur  $X$ , wenn aus dem Kontext klar ist, welche Topologie  $\mathcal{U}$  gemeint ist.

**Bemerkung 2.9.** Lemma 2.7 besagt also gerade, dass die Mengen, die wir in Definition 2.5 als “offen” bezeichnet haben, in der Tat eine Topologie auf  $\mathbf{R}^n$  bilden. Man nennt sie die *metrische Topologie* auf  $\mathbf{R}^n$  (oder auch umgangssprachlich die “übliche” Topologie).

Man prüft nach(!), dass das sog. *offene Intervall*

$$(a, b) := \{x \in \mathbf{R}, a < x < b\}$$

(für  $a < b$ ) eine offene Teilmenge im Sinn dieser Topologie ist. Ebenso ist das *abgeschlossene Intervall*

$$[a, b] := \{x \in \mathbf{R}, a \leq x \leq b\}$$

abgeschlossen (im Sinn dieser Topologie).

**Beispiel 2.10.** Sei  $X$  eine Menge (die noch nicht mit einer Topologie versehen ist). Wir können  $X$  dann mit zwei (verschiedenen) Topologien ausstatten; die erste kommt in Anwendungen immer mal wieder vor, die zweite ist eher pathologisch. Die *diskrete Topologie* ist dadurch gegeben, dass *alle* Teilmengen von  $X$  offen sind.

Die *Klumpentopologie* ist dadurch gegeben, dass nur die Teilmengen  $\emptyset$  und  $X$  offen sind.

Man prüft sofort nach(!), dass es sich in der Tat jeweils um eine Topologie handelt.

**Definition und Lemma 2.11.** Sei  $(X, \mathcal{U})$  ein topologischer Raum sowie  $A \subset X$  eine Teilmenge. Die *Teilraumtopologie* besteht aus den Teilmengen von  $A$ , die von der Form

$$U \cap A$$

sind, wobei  $U \in \mathcal{U}$ .

Dies definiert eine Topologie (auf  $A$ ). Anders gesagt: eine Teilmenge in  $A$  ist in dieser Topologie offen genau dann, wenn es eine offene Menge  $U \subset X$  (d.h.  $U \in \mathcal{U}$ ) gibt, so dass

$$V = U \cap A$$

gilt.

*Beweis.* Wir überprüfen z.B. die Bedingung in (3) in Definition 2.8: wenn  $V_i$  in  $A$  offen ist gibt es also nach Definition ein  $U_i \subset X$ , welches (in  $X$ ) offen ist mit  $V_i = U_i \cap A$ . Dann gilt

$$\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) = \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap A.$$

Die Vereinigung die rechts steht ist nach Definition einer Topologie (angewandt auf die gegebene Topologie  $\mathcal{U}$ ) offen, d.h. nach Definition der Teilraumtopologie ist der gesamte Ausdruck offen in  $A$ . Die übrigen Bedingungen in der Definition prüft man ebenso nach(!).  $\square$



Beginnen wir mit der üblichen Topologie auf  $\mathbf{R}^n$  und stattdessen eine Teilmenge  $V \subset \mathbf{R}^n$  mit der Teilraumtopologie aus, so sind die offenen Mengen in dieser Teilraumtopologie genau die Mengen, die im Sinne von Definition 2.5 offen in  $V$  sind.

Ein übliches Vorgehen in vielen mathematischen Gebieten ist es, neben den Objekten, die einen interessieren, Abbildungen festzulegen, die die Struktur der Objekte bewahren. In der linearen Algebra sind dies Vektorräume zusammen mit linearen Abbildungen. In der Topologie sind dies topologische Räume mit stetigen Abbildungen in folgendem Sinn:

**Definition 2.12.** Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung (von Mengen). Wir nennen  $f$  *stetig*, wenn für jede offene Teilmenge  $U \subset Y$  das Urbild  $f^{-1}(U)$  in  $X$  offen ist.

Stetigkeit im Sinne von Definition 2.12 ist also nach Lemma 2.6 äquivalent zur  $\epsilon$ - $\delta$ -Definition der Stetigkeit in Definition 2.1. Der Zugang via Definition 2.12 ist auf der einen Seite wesentlich allgemeiner, da er auf beliebige topologische Räume anwendbar ist, und in manchen Situationen auch deutlich bequemer, siehe z.B. Übungsaufgabe 2.6.

## 2.2 Kompaktheit, Zusammenhang und Homöomorphie

**Notation 2.13.** Wie üblich bezeichnet  $[a, b] := \{x \in \mathbf{R}, a \leq x \leq b\}$  das abgeschlossene Intervall. Wann immer wir diese Notation verwenden, ist implizit vorausgesetzt, dass  $a, b \in \mathbf{R}$  und  $a \leq b$ . Gleiches gilt für das offene Intervall  $(a, b) := \{x \in \mathbf{R}, a < x < b\}$ .

In diesem Abschnitt möchten wir grundlegende topologische Eigenschaften eines abgeschlossenen Intervalls

$$[a, b] \subset \mathbf{R}$$

verstehen.

Aus der Analysis bekannt ist der *Satz von Bolzano–Weierstraß*: Jede beschränkte Zahlenfolge  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$



Damit hat jede Zahlenfolge  $(x_n) \subset [a, b]$

der überdies wieder in  $[a, b]$  liegt. Beachte, dass diese Aussage (jede Zahlenfolge hat eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert wieder in der Teilmenge liegt) für folgende Mengen nicht erfüllt ist(!):



- $(a, b)$  (mit  $a, b \in \mathbf{R}$ ) – der Grenzwert muss nicht in  $(a, b)$  liegen
- $\mathbf{R}$  – es muss keine konvergente Teilfolge geben.

Wir suchen eine Charakterisierung dieser besonderen Eigenschaft von  $[a, b]$ , die lediglich die Begriffe “offene Mengen” (und keine Zahlenfolgen oder deren Konvergenz) erwähnt. Wir werden hierzu in Kürze den Begriff der Kompaktheit einführen und den folgenden Satz beweisen:

**Theorem 2.14.** (*Satz von Heine–Borel*) Eine Teilmenge  $A \subset \mathbf{R}^n$  ist kompakt genau dann wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Insbesondere besagt der Satz also, dass  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  kompakt ist, was für unsere weiteren Untersuchungen ganz wesentlich ist, zum Beispiel werden wir dies benutzen, um die Windungszahl rigoros zu definieren (§3.1.3). Wie üblich heißt eine Teilmenge  $A \subset \mathbf{R}^n$  hierbei *beschränkt*, wenn es einen Radius  $R \gg 0$  gibt, so dass  $A \subset B_R(0)$  gilt, d.h.  $A$  ist in einem hinreichend großen Ball enthalten.

Wir stellen außerdem eine weitere Frage: was unterscheidet das Intervall  $I := [0, 1]$  von der Vereinigung

$$J := [0, 1] \sqcup [1, 2]?$$

Die Antwort auf diese Frage soll derart sein, dass sie nur die Worte “topologischer Raum” und “offene Mengen” enthält: wir suchen also nach einem Ausdruck für die offensichtliche Tatsache, dass  $J$  sich als disjunkte Vereinigung der beiden Teilintervalle  $[0, 1]$  und  $[1, 2]$  schreiben lässt. Beide Teilintervalle sind in  $J$  offen(!).

Schreiben wir hingegen  $I$  als disjunkte Vereinigung z.B.

$$I = [0, \frac{1}{2}] \sqcup (\frac{1}{2}, 1]$$

so stellen wir fest, dass  $(\frac{1}{2}, 1]$  in  $I$  offen ist(!), hingegen  $[0, \frac{1}{2}]$  in  $I$  nicht offen ist.

**Definition 2.15.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *zusammenhängend*, wenn es nicht möglich ist  $X$  als disjunkte Vereinigung zweier offener nichtleerer Teilmengen zu schreiben. Äquivalent: falls  $U, V \subset X$  offen mit  $U \cup V = X$ , so ist entweder  $U = \emptyset$  oder  $V = \emptyset$ .

Der obige Raum  $J$  ist also nicht zusammenhängend. Es ist oft einfacher zu zeigen, dass ein topologischer Raum nicht zusammenhängend ist, als zu zeigen, dass ein Raum zusammenhängend ist.

Wir werden folgenden Satz beweisen:

**Satz 2.16.** Eine Teilmenge  $A \subset \mathbf{R}$  ist genau dann kompakt und zusammenhängend, wenn sie von der Form  $A = [a, b]$  ist (mit geeigneten  $a, b \in \mathbf{R}$ ).

Wir können nun den Zwischenwertsatz (Theorem 1.1) noch einmal etwas schärfer formulieren und als unmittelbare Folgerung aus den obigen Tatsachen ziehen:

**Folgerung 2.17.** (*Zwischenwertsatz*) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  eine stetige Funktion. Dann hat die Menge

$$\{f(x) | x \in [a, b]\}$$

ein Minimum  $m \in \mathbf{R}$  sowie ein Maximum  $M \in \mathbf{R}$ . (Man sagt auch “ $f$  nimmt ihr Minimum  $m$  und ihr Maximum  $M$  an”.) Ferner gibt es für jedes  $y \in [m, M]$  (wenigstens) ein  $x \in [a, b]$  mit

$$f(x) = y.$$

*Beweis.* Das Intervall  $[a, b]$  ist nach Satz 2.16 kompakt und zusammenhängend. Da  $f$  stetig nach Voraussetzung stetig ist, ist auch  $f([a, b]) = \{f(x) | x \in [a, b]\}$  kompakt und zusammenhängend (dies werden wir in Übungsaufgabe 2.15 zeigen; diese Aussage ist deutlich einfacher zu zeigen als die Aussage von Satz 2.16). Wiederum nach Satz 2.16 (hier wenden wir die umgekehrte Richtung an!) ist  $f([a, b])$  von der Form  $[m, M]$  für gewisse  $m \leq M \in \mathbf{R}$ . Dies ergibt sofort die Behauptungen des Satzes.  $\square$

### 2.2.1 Kompaktheit

Kompaktheit wird von den meisten Autoren als Kombination zweier Eigenschaften definiert; die erste Bedingung ist die folgende, und dient eher dazu, gewisse pathologische Sonderfälle nicht immer wieder betrachten zu müssen:

**Definition 2.18.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *Hausdorff-Raum*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: für alle  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$  gibt es offene Mengen  $U, V \subset X$  so dass  $x \in U$ ,  $y \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .

Man sagt dann auch, dass man Punkte mit offenen Mengen voneinander trennen kann.

**Beispiel 2.19.** •  $\mathbf{R}^n$  ist Hausdorffsch: für  $x \neq y$  in  $\mathbf{R}^n$  können wir ein  $r$  wählen mit  $0 < r < \frac{|x-y|}{2}$ . Dann sind die Umgebungen  $B_r(x)$  und  $B_r(y)$  disjunkt wegen der Dreiecksungleichung.

• Ein Teilraum (mit der Teilraumtopologie) eines Hausdorff-Raums ist stets Hausdorffsch(!).

• Die diskrete Topologie ist auf jeder Menge Hausdorffsch, die Klumpentopologie ist nur auf der leeren und einer einelementigen Menge Hausdorffsch.

Nun zum Kern des Begriffs der Kompaktheit. *Ganz grob* kann man sagen, dass Kompaktheit ein Endlichkeitsbegriff ist, ungefähr vergleichbar damit, dass eine Menge endlich ist oder dass ein Vektorraum endlich-dimensional ist. Die Definition ist die folgende:

**Definition 2.20.** • Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine *offene Überdeckung* ist eine Menge von offenen Teilmengen  $U_i \subset X$ , wobei  $i \in I$  eine (möglicherweise unendliche) Indexmenge durchläuft mit der Eigenschaft, dass

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

D.h. jeder Punkt in  $X$  liegt in wenigstens einer der offenen Teilmengen. Man sagt auch, dass die  $U_i$  den Raum  $X$  überdecken.

- Ein topologischer Raum heißt *kompakt*, wenn er Hausdorffsch ist (Definition 2.18) und es für *jede* offene Überdeckung  $X = \bigcup_i U_i$  eine *endliche Teilüberdeckung* gibt, d.h. eine *endliche* Teilmenge  $J \subset I$  mit der Eigenschaft, dass

$$X = \bigcup_{i \in J} U_i$$

gilt.

**Beispiel 2.21.** • Falls ein Raum  $X$  nur endlich viele Punkte hat, ist er kompakt.

- Der Raum  $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$ , versehen mit der Teilraumtopologie ist kompakt: sei  $X = \bigcup U_i$  eine offene Überdeckung. Sei  $U_0$  die offene Menge dieser Überdeckung, die 0 enthält. Laut Übungsaufgabe 2.11 enthält  $U_0$  fast alle, d.h. alle bis auf endlich viele Elemente von  $X$ . Die übrigen Elemente sind in endlich vielen weiteren  $U_i$  enthalten. Also hat jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung.

Um zu zeigen, dass ein topologischer Raum  $X$  *nicht kompakt* ist, genügt es *eine* offene Überdeckung  $X = \bigcup U_i$  zu finden, so, dass  $X$  nicht durch endlich viele der  $U_i$  überdeckt werden kann. Umgekehrt ist es meist schwieriger, zu zeigen, dass ein gewisser Raum kompakt ist: hierzu muss man eine *beliebige* offene Überdeckung betrachten und für sie eine endliche Teilüberdeckung sicherstellen, d.h. in vielen Fällen auf gewisse Weise konstruieren. Diesen Unterschied in der Schwierigkeit sehen wir an folgenden wichtigen Beispielen.

Video 28.04.20



**Beispiel 2.22.** •  $\mathbf{R}^n$  ist nicht kompakt: als offene Überdeckung wähle z.B.

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_{r \in \mathbf{N}} B_r(0),$$

d.h. wir schöpfen  $\mathbf{R}^n$  durch Bälle mit Radius  $r$  aus. Es gibt jedoch keine endliche Teilüberdeckung: jede endliche Vereinigung

$$S := B_{r_1}(0) \cup B_{r_2}(0) \cup \dots \cup B_{r_k}(0)$$

für gewisse  $r_1, \dots, r_k \in \mathbf{N}$  (mit einer endlichen Anzahl  $k$ ) ist nicht ganz  $\mathbf{R}^n$ , denn Punkte, deren Abstand zu 0 größer als  $\max(r_1, \dots, r_k)$  ist, liegen nicht in  $S$ .

- Ein offenes Intervall  $(a, b)$  ist ebenfalls nicht kompakt (Übungsaufgabe 2.13).

**Satz 2.23.** Ein abgeschlossenes Intervall  $X = [a, b]$  ist kompakt.

*Beweis.* Wir führen einen Widerspruchsbeweis: wenn  $X$  nicht kompakt wäre, gäbe es eine offene Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ , die *keine* endliche Teilüberdeckung hätte.

Wir konstruieren nun eine Folge von Intervallen

$$X =: X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) jedes Intervall  $X_{k+1}$  ist die linke oder die rechte Hälfte des vorangegangenen Intervalls  $X_k$ ,  
 (2) die Überdeckung der Intervalle

$$X_k = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap X_k) \quad (2.24)$$

haben keine endliche Teilüberdeckung (für  $k = 0$  ist dies genau die Annahme, die wir zum Widerspruch führen wollen).

Wir führen die Konstruktion induktiv durch: wenn  $X_0, \dots, X_k$  mit den obigen Eigenschaften konstruiert sind, wählen wir  $X_{k+1}$  wie folgt: die Überdeckung von  $X_k$  in (2.24) hat keine endliche Teilüberdeckung, d.h. dies ist auch für die linke oder für die rechte Hälfte von  $X_k$  richtig (eventuell auch für beide Hälften). Diese Hälfte bezeichnen wir mit  $X_{k+1}$ .

Mit dieser Folge der Intervalle können wir insbesondere einen Punkt  $x_k \in X_k$  für alle  $k \geq 0$  wählen und die Folge  $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$  hat wegen der Vollständigkeit von  $\mathbf{R}$  einen Grenzwert  $x$ , der a priori in  $\mathbf{R}$  liegt, aber wegen der Konstruktion sogar in  $\bigcap_{k \geq 0} X_k$  liegt. Dieser Punkt  $x$  liegt in einem der  $U_i$ . Da  $U_i$  offen ist, liegt eine genügend kleine Umgebung von  $x$  in  $U_i$ , d.h. es gibt  $\epsilon > 0$  so dass  $B_\epsilon(x, X) \subset U_i$ . Die Längen des Intervalls  $X_k$  ist  $\frac{b-a}{2^k}$ , da die Intervalle sich jeweils halbieren. Für  $k \gg 0$  ist also  $\frac{b-a}{2^k} < \epsilon$  und für diese  $k$  gilt also  $X_k \subset B_\epsilon(x, X)$  und damit insgesamt

$$X_k \subset B_\epsilon(x, X) \subset U_i.$$

Insbesondere hat die Überdeckung (2.24) (für diese  $k$ ) eine endliche Teilüberdeckung, nämlich sogar eine, die aus einer einzigen offenen Menge besteht. Dieser Widerspruch zeigt, dass  $X$  kompakt ist.  $\square$

Allgemeiner gilt folgender Satz, dessen Beweis eine Übungsaufgabe ist (Übungsaufgabe 2.14):

**Satz 2.25.** Eine “Box”

$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbf{R}^n$$

ist kompakt.

Wir erhalten nun eine Hälfte des Satzes von Heine–Borel als Folgerung aus einem kleinen Lemma:

**Lemma 2.26.** Wenn  $X$  ein kompakter topologischer Raum ist und  $A \subset X$  abgeschlossen, so ist auch  $A$  kompakt (wie üblich mit der Teilraumtopologie versehen).

*Beweis.* Sei  $A = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung. Nach Definition der Teilraumtopologie gibt es dann offene Teilmengen  $V_i \subset X$  mit  $U_i = A \cap V_i$ . Das Komplement  $V_0 := X \setminus A$  ist ebenfalls offen in  $X$  (da  $A$  abgeschlossen). Also ist

$$X = V_0 \cup \bigcup_i V_i$$

eine offene Überdeckung von  $X$ . Wegen der Kompaktheit von  $X$  hat sie eine endliche Teilüberdeckung:  $X = V_0 \cup \bigcup_{i \in J} V_i$  ( $J \subset I$  endliche Teilmenge). Damit ist

$$A = X \cap A = (V_0 \cap A) \cup \bigcup_{i \in J} (V_i \cap A) = \emptyset \cup \bigcup_{i \in J} U_i$$

eine endliche offene Teilüberdeckung von  $A$ .  $\square$

**Folgerung 2.27.** Eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge  $A \subset \mathbf{R}^n$  ist kompakt.

*Beweis.* Da  $A$  beschränkt ist, ist  $A$  in einer Box  $B$  (wie in Satz 2.25) enthalten. Diese Box  $B$  ist kompakt. Ferner ist  $A$  nach Voraussetzung abgeschlossen in  $\mathbf{R}^n$ , also auch abgeschlossen (bezüglich der Teilraumtopologie) in  $B$ . Nach Lemma 2.26 ist also auch  $A$  kompakt.  $\square$

Die folgende Aussage ist die Umkehrung von Folgerung 2.27 und beendet den Beweis des Satzes von Heine–Borel (Theorem 2.14):

**Satz 2.28.** Sei  $A \subset \mathbf{R}^n$  eine Teilmenge die (mit der Teilraumtopologie versehen) kompakt ist. Dann ist  $A$  beschränkt und abgeschlossen.

*Beweis.* Die Tatsache, dass  $A$  beschränkt sein muss, ist eine Übungsaufgabe ähnlich zu Beispiel 2.22. Die Tatsache, dass  $A$  abgeschlossen ist, ist eine Folgerung aus Lemma 2.29. Dieses Lemma ist anwendbar, denn Beispiel 2.19 besagt dass  $\mathbf{R}^n$  Hausdorffsch ist und damit der kompakte Teilraum  $A \subset \mathbf{R}^n$  abgeschlossen ist.  $\square$

**Lemma 2.29.** Sei  $X$  ein Hausdorff-Raum,  $A \subset X$  ein Teilraum, der (wie immer mit der Teilraumtopologie versehen) kompakt ist. Dann ist  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$ .

*Beweis.* Wir zeigen, dass das Komplement  $U := X \setminus A$  offen ist. Es genügt hierzu zu zeigen, dass es für jeden Punkt  $u \in U$  eine offene Umgebung  $V_u \ni u$  gibt, die in  $U$  enthalten ist: dann ist  $U = \bigcup_{u \in U} V_u$  eine (i.d.R. unendliche) Vereinigung offener Mengen und damit offen.

Für jedes  $a \in A$  gibt es nach Voraussetzung disjunkte offene Umgebungen  $W_a \ni a$  und  $S_a \ni u$ . Die offene Überdeckung  $A = \bigcup_{a \in A} (W_a \cap A)$  hat nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung, sagen wir  $A = \bigcup_{a \in A'} (W_a \cap A)$  mit einer endlichen Teilmenge  $A' \subset A$ . Die Teilmenge  $V_u := \bigcap_{a \in A'} S_a$  enthält  $u$ , ist (!) disjunkt zu  $A$ , ist als *endlicher* Schnitt offener Mengen wieder offen, erfüllt also die Anforderungen, die wir eingangs gestellt haben.  $\square$



### 2.2.2 Zusammenhang

Wir halten zunächst fest, dass ein Raum  $X$  genau dann zusammenhängend ist, wenn jede *sowohl abgeschlossene als auch offene* Teilmenge  $A \subset X$  entweder  $\emptyset$  oder der ganze Raum  $X$  ist: das Komplement  $X \setminus A$  ist dann ebenfalls offen und  $X = A \sqcup (X \setminus A)$  ist eine Zerlegung in zwei disjunkte offene Teilmengen.

Video 05.05.20



**Satz 2.30.** Die folgenden Teilmengen von  $\mathbf{R}$  sind zusammenhängend:

- $(a, b)$ ,
- $[a, b)$ ,
- $(a, b]$ ,
- $[a, b]$ , (jeweils mit beliebigen  $a < b$ )
- $\mathbf{R}$ .

*Beweis.* Wir schreiben  $I$  für einen dieser Räume. Angenommen  $I = U \sqcup V$  ist eine Zerlegung in zwei disjunkte, nicht-leere, offene Teilmengen von  $I$ . Wähle  $u \in U$  und  $v \in V$ . Indem wir ggf.  $u$  und  $v$  vertauschen, können wir annehmen dass  $u < v$ . Sei  $s := \inf\{x \in V, x > u\}$ . Da die Menge  $\{x \in V, x > u\}$  zumindest  $v$  enthält und die Elemente in der Menge alle größer als  $u$  sind, gilt

$$v \geq s \geq u.$$

Daraus folgt  $s \in I$  (in allen Fällen  $I = (a, b)$  usw., die wir betrachten). Wir betrachten die beiden möglichen Fälle:

- Falls  $s \in U$ : da  $U$  offen ist, und somit ein ganzer  $\epsilon$ -Ball um  $s$  noch in  $U$  liegt, liegen in  $U$  auch Elemente von  $V$ , im Widerspruch zu  $U \cap V = \emptyset$ .
- Falls  $s \in V$ : da  $V$  in  $I$  offen ist, gibt es ein  $\epsilon_1 > 0$  so dass  $B_{\epsilon_1}(s, I)$  in  $V$ . Wegen  $s \notin U$  ist  $\epsilon_2 := s - u > 0$ . Es gilt

$$\{s' \in \mathbf{R}, s' \leq s, |s' - s| < \epsilon_2\} \subset I.$$

Sei  $\epsilon := \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ . Für alle  $s' < s$  mit  $|s - s'| < \epsilon$  gilt dann  $s' \in V$ . Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von  $s$ .  $\square$

Wir beweisen nun die versprochene Charakterisierung der kompakten und zusammenhängenden Teilmengen in  $\mathbf{R}$  (Satz 2.16).



*Beweis.* Wir wissen aus Satz 2.30 und Satz 2.23, dass  $[a, b]$  kompakt und zusammenhängend ist. Sei nun umgekehrt  $A \subset \mathbf{R}$  kompakt und zusammenhängend.

Wir zeigen zunächst, dass für alle  $a, b \in A$  mit  $a < b$  auch alle reellen Zahlen  $x \in \mathbf{R}$  mit  $a < x < b$  ebenfalls in  $A$  liegen. Wenn  $x \notin A$  wäre, so ist

$$A = \{r \in A \mid r < x\} \sqcup \{r \in A \mid r > x\}$$

eine Zerlegung in disjunkte (wegen  $x \notin A$ ) offene (nach Definition der Teilraumtopologie) nicht-leere (da sie jeweils  $a$  bzw.  $b$  enthalten) Teilmengen. Dieser Widerspruch zeigt die obige Behauptung.

Da  $A$  kompakt ist, ist es nach dem Satz von Heine–Borel (Theorem 2.14) beschränkt und abgeschlossen. D.h.  $M := \sup\{x \in A\}$  ist eine reelle Zahl, die überdies in  $A$  liegt (da  $A$  abgeschlossen). Ähnlich gilt  $m := \inf\{x \in A\} \in A$ . Wegen der obigen Behauptung folgt dann

$$A = [m, M].$$

### 2.2.3 Homöomorphie

**Definition 2.31.** Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei topologischen Räumen heißt *Homöomorphismus*, wenn es eine *stetige* Abbildung

$$g : Y \rightarrow X$$

gibt, so dass

$$g \circ f = \text{id}_X \text{ und } f \circ g = \text{id}_Y,$$

d.h.  $g(f(x)) = x$  für alle  $x \in X$  und  $f(g(y)) = y$  für alle  $y \in Y$ .

Man sagt,  $X$  und  $Y$  sind *homöomorph*, wenn es einen Homöomorphismus  $f : X \rightarrow Y$  gibt.

**Beispiel 2.32.** • Die Abbildung

$$f : (0, 1) \rightarrow (1, \infty) := \{x \in \mathbf{R}, x > 1\}, x \mapsto \frac{1}{x}$$

ist ein Homöomorphismus. In der Tat,

$$g : (1, \infty) \rightarrow (0, 1), y \mapsto \frac{1}{y}$$

ist ebenfalls stetig und es gilt  $f(g(y)) = y$ ,  $g(f(x)) = x$  für alle  $x, y$ .

- Man konstruiert auf ähnliche Weise(!) einen Homöomorphismus

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}.$$

- In Übungsaufgabe 2.9 etablieren wir einen Homöomorphismus

$$S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

- Es gibt keinen Homöomorphismus  $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , dies geht aus Lemma 2.34 hervor und der Tatsache, dass  $[a, b]$  kompakt ist,  $\mathbf{R}$  jedoch nicht (beides nach Heine–Borel, Theorem 2.14).

- Es gibt keinen Homöomorphismus

$$S^1 \rightarrow [a, b].$$

Dies können wir zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht beweisen (beide Räume sind kompakt und auch zusammenhängend, so dass Lemma 2.34 uns nicht weiter hilft), sondern benötigen eine feinere Invariante, nämlich die Fundamentalgruppe: wir werden zeigen, dass die Fundamentalgruppen beider Räume verschieden sind und es daher keinen Homöomorphismus geben kann.



- Ebenfalls gibt es keinen Homöomorphismus

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{q_1, \dots, q_m\},$$

wobei  $p_i \in \mathbf{R}^2$  jeweils paarweise verschiedene Punkte und  $q_j \in \mathbf{R}^2$  ebenfalls paarweise verschiedene Punkte sind und  $n \neq m$  ist.<sup>1</sup> Auch dies werden wir erst mit Hilfe der Fundamentalgruppe zeigen können. Hierzu eine kleine Vorschau: mit Hilfe des Satzes von van Kampen (siehe Kapitel 3) werden wir die Fundamentalgruppen berechnen. Wir werden die sog. freien Gruppen mit  $n$  bzw.  $m$  Erzeugern erhalten. Im Fall  $n \neq m$  sind diese voneinander verschieden, daher (wie wir ebenfalls erst noch sehen werden) können die Räume nicht homöomorph sein.

**Bemerkung 2.33.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und bijektiv. Sei  $g : Y \rightarrow X$  die Umkehrabbildung von  $f$ . (Es gilt also  $g \circ f = \text{id}_X$ ,  $f \circ g = \text{id}_Y$ ). Dann sind äquivalent:

- $g$  ist stetig
- $f$  ist ein Homöomorphismus
- $f$  ist eine *offene Abbildung*, d.h.  $f(U)$  ist offen für alle offenen Teilmengen  $U \subset X$ .

In der Tat, die ersten beiden Aussagen sind genau nach Definition äquivalent. Die erste ist äquivalent zur dritten, da

$$f(U) = f(f^{-1}(f(U))) = g^{-1}(f^{-1}(f(U))) = g^{-1}(U).$$

Damit  $g$  stetig genau dann wenn  $f$  offen ist.

Wenn zwei topologische Räume  $X, Y$  homöomorph sind, sind sie für die Belange der Topologie quasi nicht zu unterscheiden, und alle topologischen Eigenschaften die  $X$  hat, hat auch  $Y$ :

**Lemma 2.34.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus.

- (1)  $X$  ist genau dann kompakt, wenn  $Y$  kompakt ist.
- (2)  $X$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $Y$  zusammenhängend ist.

ⓘ *Beweis.* Wir zeigen nur (1), die zweite Aussage ist eine Übungsaufgabe(!).

Wir zeigen die Implikation “ $\Rightarrow$ ”: sei  $X$  kompakt. Um zu zeigen, dass  $Y$  Hausdorffsch ist, seien  $y_1 \neq y_2$  in  $Y$ . Dann ist  $x_1 := f^{-1}(y_1) \neq x_2 := f^{-1}(y_2)$ . Da  $X$  Hausdorffsch ist, gibt es  $U_1 \ni x_1, U_2 \ni x_2$  (offene Teilmengen in  $X$ ) mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Dann ist auch  $f(U_1) \cap f(U_2) = \emptyset$  (da  $f$  injektiv ist). Da  $f$  offen ist, handelt es sich bei  $f(U_1)$  und  $f(U_2)$  um *offene* Umgebungen von  $f(x_1) = y_1$  und  $y_2$ . Also ist  $Y$  Hausdorffsch.

Sei nun  $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$  eine offene Überdeckung. Dann ist

$$X = f^{-1}(Y) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(V_i)}_{=: U_i} = \bigcup_i U_i$$

<sup>1</sup> Verhältnismäßig elementarer ist folgende Tatsache: im Fall  $n = m$  gibt es einen Homöomorphismus

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{q_1, \dots, q_n\}.$$

Um diesen zu konstruieren benutzen wir die Tatsache, dass es für  $x_1 < \dots < x_n \in \mathbf{R}$  einen Homöomorphismus

$$\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

gibt, der  $x_k$  auf  $k$  abbildet (z.B. eine stückweise lineare Abbildung).

Um die obige Behauptung zu sehen, kann man annehmen, dass  $q_k = (0, k)$  für  $k = 1, \dots, n$  (nutze hier, dass die Kompositionen und Inverse von Homöomorphismen wieder Homöomorphismen sind.) Es gibt dann eine Gerade  $L$  durch 0 mit der Eigenschaft, dass die orthogonale Projektion der Punkte  $p_1, \dots, p_n$  auf die Gerade jeweils alle verschieden sind. Die Drehung um den Ursprung, die die Gerade  $L$  auf die  $x$ -Achse abbildet ist ein Homöomorphismus, wir können daher annehmen, dass die obige Eigenschaft für die  $x$ -Achse gilt. Schreibe  $p_k = (x_k, y_k)$ , dann gilt also dass die  $x_k$  alle paarweise verschieden sind. Wähle einen Homöomorphismus  $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , der  $x_k \mapsto k$  erfüllt. Dann ist  $\varphi \times \text{id} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  ein Homöomorphismus, der  $p_k$  auf  $(k, y_k)$  abbildet. Es gibt ferner einen Homöomorphismus  $\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , der die  $x$ -Koordinate aller Punkte festhält und  $(k, y_k)$  auf  $(k, 0)$  abbildet. Auf diese Weise erhalten wir einen Homöomorphismus von  $\mathbf{R}^2$ , der  $p_k$  auf  $(k, 0)$  abbildet. Durch Einschränken erhalten wir einen Homöomorphismus

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\} \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(1, 0), \dots, (k, 0)\}.$$

eine Überdeckung von  $X$ . Da  $f$  stetig ist, ist es eine *offene* Überdeckung. Wegen der Kompaktheit von  $X$  gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt eine endliche Teilmenge  $J \subset I$  mit

$$X = f^{-1}(Y) = \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Da  $f$  nach Bemerkung 2.33 offen ist, ist auch

$$Y = f(X) = \bigcup_{i \in J} f(U_i) = \bigcup_{i \in J} V_i$$

eine offene Überdeckung. Damit haben wir eine endliche Teilüberdeckung zur obigen Überdeckung gefunden,  $Y$  ist also kompakt.

Die Implikation “ $\Leftarrow$ ” folgt hieraus: sei  $Y$  kompakt. da  $f$  ein Homöomorphismus ist, ist es auch  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ . Wenden wir nun die bereits gezeigte Implikation “ $\Rightarrow$ ” auf  $f^{-1}$  an, erhalten wir die Kompaktheit von  $X$ .  $\square$

Zum Schluss dieses Kapitels noch ein paar meta-mathematische Anmerkungen zum Begriff des Homöomorphismus. ■  
Dieser nimmt folgende Rolle ein:

|                 | Objekte            | Abbildungen zwischen Objekten | Isomorphismen  |
|-----------------|--------------------|-------------------------------|--|
|                 | $X, Y$             | $f : X \rightarrow Y$         | $X \begin{smallmatrix} \xleftarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} Y$ mit $f \circ g = \text{id}$ ,<br>$g \circ f = \text{id}$ |
| Mengenlehre     | Mengen             | beliebige Abbildungen         | Bijektionen  |
| Lineare Algebra | $k$ -Vektorräume   | $k$ -lineare Abbildungen      | Isomorphismen von Vektorräumen   |
| Topologie       | topologische Räume | stetige Abbildungen           | Homöomorphismen  |

In jedem dieser mathematischen Gebiete ist der Isomorphiebegriff absolut grundlegend: Bijektionen von Mengen (endlich oder auch unendlich) liefern uns den Begriff der Kardinalzahl. Isomorphismen von Vektorräumen sind für die lineare Algebra ebenso grundlegend. Die Frage: “Wann sind zwei gegebene topologische Räume homöomorph?” ist genauso grundlegend, wenn es auch keine so zufriedenstellende Antwort gibt wie die Tatsache, dass zwei Vektorräume genau dann isomorph sind, wenn ihre Dimension übereinstimmt.

Ein weiterer *wichtiger* technischer Unterschied besteht auch insofern, dass eine bijektive stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  nicht automatisch ein Homöomorphismus ist (Übungsaufgabe 2.8). In Definition 2.31 darf die Forderung dass  $g$  stetig ist, also nicht fallen gelassen werden. Im Gegensatz dazu zeigt man in der linearen Algebra, dass die Umkehrabbildung einer bijektiven  $k$ -linearen Abbildung automatisch wieder  $k$ -linear ist und damit  $f$  ein Isomorphismus ist.

## 2.3 Übungsaufgaben

### 2.3.1 Hausaufgaben

**Übungsaufgabe 2.1.** Wir betrachten die übliche Topologie auf  $\mathbf{R}$ . Gib eine unendliche Familie von offenen Teilmengen  $U_i \subset \mathbf{R}$  an so dass der Durchschnitt  $\bigcap_{i \in I} U_i$  *nicht* offen ist.

Gibt es eine unendliche Familie von offenen Teilmengen  $U_i \subset \mathbf{R}$  so dass  $\bigcap_{i \in I} U_i$  offen ist?

**Übungsaufgabe 2.2.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte  $x_0, x_1 \in X$  einen (stetigen) Pfad  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  gibt, der  $x_0$  und  $x_1$  verbindet, d.h.  $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$ . Zeige: ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist er auch zusammenhängend. Tipp: wie kann man aus einer Zerlegung  $X = U \sqcup V$  in disjunkte, nicht-leere offene Teilmengen eine ähnliche Zerlegung für  $[0, 1]$  folgern?

**Übungsaufgabe 2.3.** Beende den Beweis von Lemma 2.7, indem du die beiden noch offenen Behauptungen zeigst.

**Übungsaufgabe 2.4.** Betrachte die  $n$ -Sphäre  $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$  mit der Teilraumtopologie. Gib eine Menge  $E \subset S^n$  an, die in  $S^n$  offen ist, nicht jedoch in  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Gibt es eine Menge  $F \subset S^n$ , die sowohl in  $S^n$ , als auch in  $\mathbf{R}^{n+1}$  offen ist?

Tipp: um eine Intuition für die Frage zu entwickeln, bietet es sich an, zunächst  $n = 1$  zu betrachten.

**Übungsaufgabe 2.5.** Sei  $X = \{a, b\}$  eine Menge mit zwei Elementen. Gib eine Topologie auf  $X$  an, die weder die diskrete, noch die Klumpentopologie ist.

Skizziere die offenen Mengen dieser Topologie, sowie auch die der diskreten und der Klumpentopologie.

**Übungsaufgabe 2.6.** Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Zeige, dass  $g \circ f : X \rightarrow Z$  ebenfalls stetig ist. In Worten gesagt: Kompositionen stetiger Abbildungen sind wieder stetig.

Hinweis: Der Beweis dieser Behauptung sollte ungefähr 1–2 Zeilen umfassen. Vergleiche einmal mit dem Beweis aus der Analysis-Vorlesung, wo die gleiche Aussage für Teilmengen  $X, Y, Z \in \mathbf{R}^n$  mittels der  $\epsilon$ - $\delta$ -Definition gezeigt wird!

**Übungsaufgabe 2.7.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $V \subset X$  eine Teilmenge. Wir versehen  $V$  mit der Teilraumtopologie.

- Zeige, dass die Inklusion  $V \subset X$  dann eine stetige Abbildung ist.
- Was ist mit dem Slogan “Die Teilraumtopologie auf  $V$  ist die größte Topologie auf  $V$  bezüglich derer die Inklusion  $V \subset X$  stetig ist” gemeint? Formalisiere diesen Slogan und begründe ihn kurz.

**Übungsaufgabe 2.8.** (Für Übungsaufgabe 2.8). Betrachte  $U := (-\infty, 0] \sqcup (1, \infty) (\subset \mathbf{R})$ . Gib eine stetige, bijektive Abbildung

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}$$

an, so dass die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow U$$

nicht stetig ist.

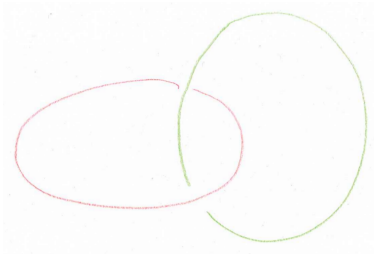
Tipp: wie lässt sich der Graph der Umkehrabbildung  $f^{-1}$  anhand des Graphen von  $f$  konstruieren?

**Übungsaufgabe 2.9.** Gib einen Homöomorphismus

$$S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

an. Skizziere ihn im Fall  $n = 1$  und  $n = 2$ .

**Übungsaufgabe 2.10.** Sei  $K \subset \mathbf{R}^3$  die Teilmenge die zwei verketteten Ringen entspricht (siehe Bild), sowie  $F$  die Teilmenge, die zwei nicht verketteten Ringen entspricht. (Beide Ringe seien idealisiert dünn.)



Sind  $K$  und  $F$  homöomorph?

**Übungsaufgabe 2.11.** Sei

$$X := \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\} \subset \mathbf{R}.$$

Wir versehen  $X$  mit der Teilraumtopologie von  $\mathbf{R}$ . Sei  $U \subset X$  eine offene Teilmenge, die 0 enthält. Zeige, dass  $X \setminus U$  dann nur endlich viele Elemente (von  $X$ ) enthält.

**Übungsaufgabe 2.12.** Wir betrachten folgende Mengen, die wir mit der Teilraumtopologie in  $\mathbf{R}$  versehen. Welche der Mengen sind kompakt?

- $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ ,
- $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ ,
- $\mathbf{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbf{R}$ ,
- $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbf{N}\}$ .

**Übungsaufgabe 2.13.** Zeige, dass ein offenes Intervall  $(a, b)$  (mit  $a < b$  in  $\mathbf{R}$ ) nicht kompakt ist.

- Zeige dies einerseits, indem du *eine* (bequem gewählte) offene Überdeckung angibst und zeigst, dass diese Überdeckung keine endliche Teilüberdeckung besitzt.
- Zeige dies andererseits mittels Lemma 2.34.

**Übungsaufgabe 2.14.** Beweise Satz 2.25. Illustriere alle wesentlichen Beweisschritte im Fall  $n = 2$ .

Tipp: Konstruiere hierzu eine geeignete Folge von Boxen (als Verallgemeinerung der Folge der Intervalle im Beweis von Satz 2.23).

**Übungsaufgabe 2.15.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeige:

- Falls  $X$  zusammenhängend ist, so ist auch  $f(X)$  zusammenhängend.
- Falls  $X$  kompakt ist und  $Y$  Hausdorffsch ist, so ist auch  $f(X)$  kompakt.

Tipp: gegeben eine offene Überdeckung  $f(X) = \bigcup_{i \in I} U_i$ , welche Eigenschaften hat  $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ ?

**Übungsaufgabe 2.16.** Gibt es eine stetige surjektive Abbildung

$$f : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}?$$

**Übungsaufgabe 2.17.** Diskutiere den Satz von Heine–Borel am Beispiel der folgenden Teilmengen von  $\mathbf{R}$ , jeweils versehen mit der Teilraumtopologie

- $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbf{N}\}$  (vgl. Beispiel 2.21),
- $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbf{N}\}$ .

### 2.3.2 Präsenzaufgaben für die Übungen

**Übungsaufgabe 2.18.** Sei  $X = \{1, 2, 3\}$ . Welche der folgenden Systeme  $\mathcal{U}$  von Teilmengen von  $X$  definieren eine Topologie auf  $X$ ? Skizziere jeweils die offenen Mengen.

- (1)  $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{1\}, X\}$
- (2)  $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, X\}$
- (3)  $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}$

**Übungsaufgabe 2.19.** Betrachte  $\mathbf{R}$  mit der Topologie

$$\mathcal{U} = \{(-n, n) | n \in \mathbf{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbf{R}\}.$$

Ist dies ein Hausdorffraum?

Tipp: Betrachte die Elemente 0 und  $\frac{1}{2}$ .

**Übungsaufgabe 2.20.** (1) Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Zeige:  $X$  trägt genau dann die diskrete Topologie, wenn jede Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  in einen weiteren topologischen Raum  $Y$  stetig ist.

- (2) Es sei  $Y$  ein topologischer Raum, so dass jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  von einem weiteren topologischen Raum  $X$  stetig ist. Welche Topologie trägt  $Y$ ?

Tipp: betrachte hierzu den Fall, dass  $X$  die gleiche Menge wie  $Y$  ist und  $f$  die Identitätsabbildung ist, d.h.  $f(x) = x$ . Statte  $X$  jedoch mit einer möglichst extremen Topologie aus. Was bedeutet dann die Stetigkeit von  $f$ ?

**Übungsaufgabe 2.21.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Zeige:  $f$  ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Menge  $A \subseteq Y$  das Urbild  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $X$  ist.

**Übungsaufgabe 2.22.** Gegeben sind jeweils zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$ . Gibt es eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  bzw. gibt es eine stetige *surjektive* Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ . Gib ein geeignetes Beispiel an oder begründe ggf., warum es keine solche Abbildung geben kann.

- (1)  $X = [0, 1]$ ,  $Y = [0, \frac{1}{2}] \cup [1, 2] \subset \mathbf{R}$ ,
- (2)  $X = [0, 1]$ ,  $Y = (0, 1) \subset \mathbf{R}$ ,
- (3)  $X = [0, 1)$ ,  $Y = (0, \frac{1}{2}) \cup [1, \frac{3}{2}) \subset \mathbf{R}$ .

**Übungsaufgabe 2.23.** Skizziere die folgenden Abbildungen. Entscheide, ob es sich um Homöomorphismen handelt und gib – falls möglich – die Umkehrabbildung an:

- (1)  $f: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ,  $x \mapsto \exp(x)$ ,
- (2)  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto \tan(x\pi - \frac{\pi}{2})$ ,
- (3)  $f: [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ ,  $x \mapsto (\cos(x), \sin(x))$ .

**Übungsaufgabe 2.24.** (1) Es sei  $f: X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus und  $A \subset X$  eine Teilmenge. Zeige, dass auch die Einschränkung  $f|_A: A \rightarrow f(A)$  ein Homöomorphismus ist.

- (2) Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume – beide versehen mit der diskreten Topologie. Zeige:  $X$  und  $Y$  sind genau dann homöomorph, wenn sie dieselbe Kardinalität besitzen (d.h. wenn es eine Bijektion zwischen  $X$  und  $Y$  gibt).
- (3) Gib topologische Räume  $X, Y$  an, die die gleiche Kardinalität besitzen, jedoch nicht homöomorph zueinander sind (d.h. so dass es keinen Homöomorphismus  $f: X \rightarrow Y$  gibt).

**Übungsaufgabe 2.25.** (Vgl. die Fußnote auf Seite 18)

- Seien  $x_1 < \dots < x_n$  reelle Zahlen. Gib einen Homöomorphismus

$$\varphi: \mathbf{R} \setminus \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$$

an.

- Zeige, dass Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen in  $\mathbf{R}^n$  Homöomorphismen sind.
- Seien  $y_1, \dots, y_k \in \mathbf{R}$  beliebig. Konstruiere einen Homöomorphismus

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(1, y_1), \dots, (k, y_k)\} \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(1, 0), \dots, (k, 0)\}.$$

Tipp: die Homöomorphismen lassen sich jeweils konstruieren, indem man Homöomorphismen  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  (bzw.  $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ) angibt, die die jeweiligen Punkte aufeinander abbilden.

# Kapitel 3

## Die Fundamentalgruppe

Die Fundamentalgruppe ist ein grundlegendes und sehr reichhaltiges algebraisches Datum, welches man einem topologischen Raum zuordnen kann. Wir nähern uns dem Begriff an, indem wir zunächst die Windungszahl kennen lernen. Wie wir später feststellen werden, ist das Verständnis der Windungszahl gleichbedeutend damit, die Fundamentalgruppe von  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  zu verstehen. Wir werden im Zuge dieses Studiums auch einige Grundbegriffe der Gruppentheorie kennen lernen, insbesondere natürlich den Begriff der Gruppe selbst.

### 3.1 Die Windungszahl

#### 3.1.1 Motivation des Begriffs

**Definition 3.1.** Ein *Pfad* (oder auch *Weg*) ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2,$$


wobei  $a < b$  reelle Zahlen sind. Das Bild  $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t) | t \in [a, b]\}$  wird im Folgenden auch als *Träger* oder auch mit  $\text{supp } \gamma$  bezeichnet. (“supp” steht für support, d.h. Träger.)

Eine *Schleife* ist eine Pfad  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  deren Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen, d.h.

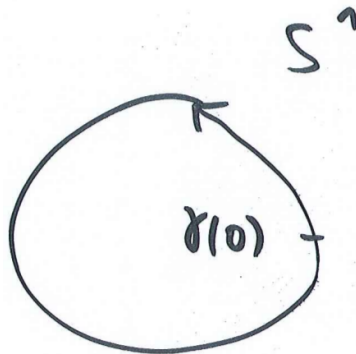
$$\gamma(0) = \gamma(1).$$

(Die Tatsache, dass wir den Anfangs- (=End-)punkt der Schleife bei 0 bzw. 1 ansetzen ist an dieser Stelle nur eine Konvention, die uns aber später, bei der Komposition von Schleifen bequem sein wird, siehe Definition und Lemma 3.32.)

**Bemerkung 3.2.** • Es ist ein interessanter und wichtiger Fall, dass die Abbildung  $\gamma$  *nicht* injektiv ist – d.h. eine Schleife oder ein Pfad darf sich selbst überkreuzen.

- Ein Pfad (oder eine Schleife) ist *nicht* bestimmt durch sein Bild  $\text{supp } \gamma$ : man konstruiert leicht(!) zwei verschiedene Pfade  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ , deren Bilder übereinstimmen, z.B. indem man die Richtung des Pfades ändert oder auch den Weg mit “anderer Geschwindigkeit” durchläuft. 
- Wenn wir einen Pfad  $\gamma$  mittels seines Bildes  $\text{supp } \gamma$  veranschaulichen, durchlaufen wir den Pfad in Pfeilrichtung, z.B. für folgenden Pfad:

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \gamma(t) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$



- Man bezeichnet die Elemente in  $[a, b]$  in diesem Kontext gelegentlich als “Zeit”, mit der Idee, dass der Pfad in einem gewissen Zeitintervall zurückgelegt wird.

Die Windungszahl lässt sich intuitiv wie folgt beschreiben:

**Idee 3.3.** Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  eine Schleife (nicht nur ein beliebiger Pfad) und  $p \in \mathbf{R}^2$  ein Punkt der *nicht* im Bild  $\text{supp } \gamma$  liegt. Wir beschreiben die *Windungszahl* der Schleife  $\gamma$  um den Punkt  $p$ , Notation

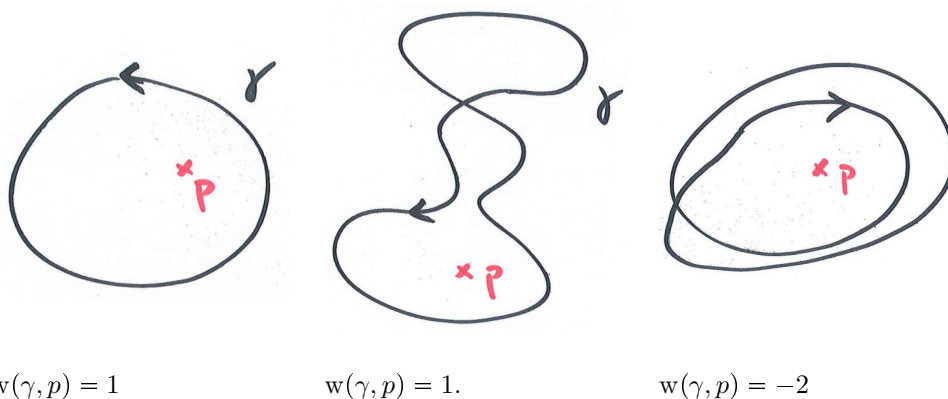
$$w(\gamma, p),$$

wie folgt: zu jedem (“Zeitpunkt”)  $t \in [0, 1]$  betrachte den Strahl

$$L_t,$$

der von  $p$  ausgeht und durch  $\gamma(t)$  führt. (Beachte  $\gamma(t) \neq p$ , so dass der Strahl wohldefiniert ist.) Da  $\gamma$  eine Schleife ist, ist  $L_0 = L_1$ , d.h. ausgehend von  $L_0$  rotieren die Strahlen  $L_t$  für  $t \in [0, 1]$  eine gewisse Anzahl, bis sie für  $t = 1$  wieder zu  $L_1 = L_0$  zurückkehren. Wir definieren die Windungszahl als die Anzahl dieser Rotationen, wobei wir konventionsgemäß Rotationen im mathematisch positiven Drehsinn (gegen den Uhrzeigersinn) jeweils mit  $+1$  zählen, Rotationen im mathematisch negativen Drehsinn mit  $-1$ .

**Beispiel 3.4.**



$$w(\gamma, p) = 1$$

$$w(\gamma, p) = 1.$$

$$w(\gamma, p) = -2$$

Im mittleren Bild: was ist die Windungszahl um einen Punkt in der oberen kleinen Schleife?

**Beispiel 3.5.** Folgendes Video stammt von der Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Winding\\_number#/media/File:Winding\\_Number\\_Animation\\_Small.gif](https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number#/media/File:Winding_Number_Animation_Small.gif).



### 3.1.2 Windungszahl von Polygonzügen

Wir führen die Windungszahl nun formal korrekt für sehr spezielle Pfade und Schleifen, die sog. polygonalen Pfade, ein. Im nächsten Abschnitt werden wir diese Einschränkung dann wieder fallen lassen. Wir werden die Windungszahl als Summe geeigneter Drehwinkel definieren; letztere führen wir nun ein.

Video 08.05.20



**Definition 3.6.** Seien  $p, q \in \mathbf{R}^2$ .

- Wir bezeichnen mit  $[p, q] \subset \mathbf{R}^2$  die Strecke zwischen  $p$  und  $q$ .
- Falls  $0 \notin [p, q]$  ist, so bezeichnen wir mit

$$\theta(p, q, 0) \in (-\pi, \pi)$$

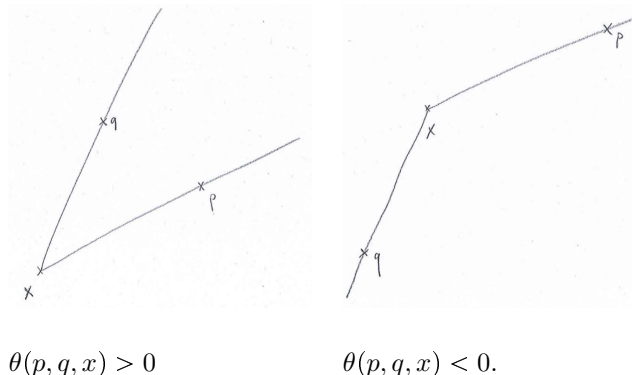
den Winkel zwischen den Strecken  $[0, p]$  und  $[0, q]$ .

- Allgemeiner, falls ein weiterer Punkt  $x \notin [p, q]$ , so bezeichne

$$\theta(p, q, x) := \theta(p - x, q - x, 0)$$

den Winkel zwischen den Strecken  $[x, p]$  und  $[x, q]$ .

**Bemerkung 3.7.** Der Winkel ist positiv genau dann, wenn  $x, p, q$  (in dieser Reihenfolge) gegen den Uhrzeigersinn angeordnet sind; ansonsten ist er negativ.



$$\theta(p, q, x) > 0$$

$$\theta(p, q, x) < 0.$$

Die Bedingung  $0 \notin [p, q]$  besagt, dass  $p$  nicht ein positives Vielfaches von  $-q$  ist. Aus diesem Grund ist der Winkel nicht  $\pi$ . Die Beschränkung der Definition von  $\theta$  auf diese Situation wird in Übungsaufgabe 3.11 erklärt.

**Definition 3.8.** Ein *Polygonzug* ist eine endliche geordnete Menge

$$\mathcal{P} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$$

von Punkten in  $\mathbf{R}^2$ . Der Polygonzug heißt *geschlossen*, wenn  $p_n = p_0$  gilt.

Wir schreiben

$$\text{supp } \mathcal{P} := \bigcup_{k=1}^n [p_{k-1}, p_k]$$

für die Vereinigung der Strecken, deren Endpunkte jeweils die Punkte in dem Polygonzug sind.

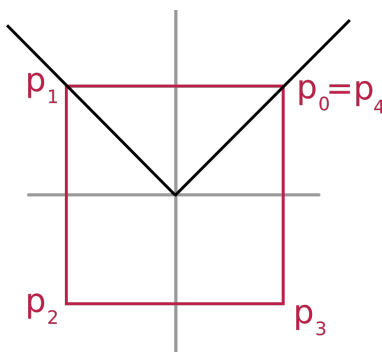
**Bemerkung 3.9.** Es ist wichtig, die Ordnung auf  $\mathcal{P}$  nicht zu vergessen (d.h. die Reihenfolge der  $p_k$ ), da wir in Kürze den Pfad betrachten werden, der von  $p_0$  linear zu  $p_1$  läuft, dann linear zu  $p_2$  usw.

**Definition 3.10.** (*Windungszahl eines Polygonzugs*) Sei  $\mathcal{P} := (p_0, p_1, \dots, p_n)$  ein Polygonzug. Sei ferner  $x \in \mathbf{R}^2$  ein Punkt der nicht auf dem Polygonzug liegt, d.h.  $x \notin \text{supp } \mathcal{P}$ . Die *Windungszahl* von  $\mathcal{P}$  um  $x$  ist definiert als

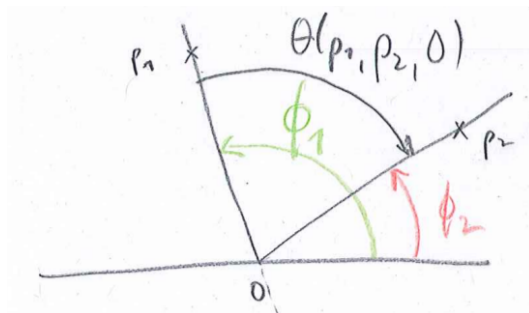
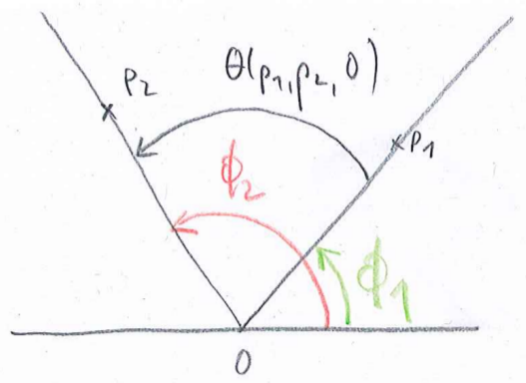
$$w(\mathcal{P}, x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \theta(p_{k-1}, p_k, x).$$

**Beispiel 3.11.** Die Windungszahl des folgenden Polygonzugs um 0 ist 1: die Winkel  $\theta(p_k, p_{k+1}, 0)$  sind gerade  $\pi/2$ , insgesamt gilt

$$w((p_0, \dots, p_4), 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{\pi}{2} = 1.$$



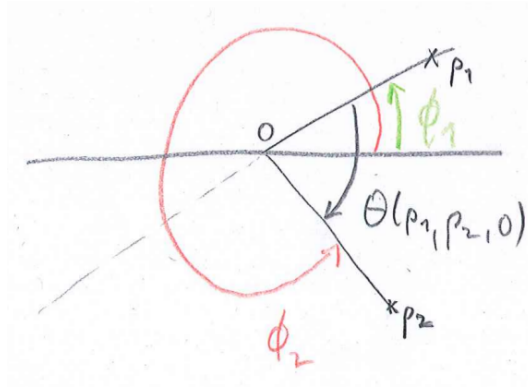
**Beispiel 3.12.** Wir betrachten jeweils zwei Punkte  $p_1, p_2 \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  sowie ihre Argumente  $\phi_1, \phi_2$ , die wir in  $[0, 2\pi)$  auffassen. D.h.  $\phi_k$  ist jeweils der Winkel zwischen der positiven  $x$ -Achse und dem Strahl der durch 0 und  $p_k$  geht, so wie eingezeichnet. Wir vergleichen  $\theta(p_2, p_1, 0)$  mit  $\phi_2 - \phi_1$  in verschiedenen Fällen:



⋮

a)  $\theta(p_1, p_2, 0) = \phi_2 - \phi_1$

b)  $\theta(p_1, p_2, 0) =$



$$c) \theta(p_1, p_2, 0) =$$

⋮

**Lemma 3.13.** In der Situation von Definition 3.10 sei ferner  $\mathcal{P}$  geschlossen (d.h.  $p_0 = p_n$ ). Dann ist die Windungszahl eine ganze Zahl:

$$w(\mathcal{P}, x) \in \mathbf{Z}$$

(a priori liegt die Windungszahl nur in  $\mathbf{R}$ ).

*Beweis.* Wir dürfen (um die Notation etwas zu vereinfachen)  $x = 0$  annehmen (ansonsten ersetzen wir alle  $p_k$  durch  $p_k - x$  sowie  $x$  durch 0. Dies ändert die einzelnen  $\theta$ -Summanden und damit auch die Windungszahl nicht.)

Für jedes  $k$ , sei  $\phi_k \in [0, 2\pi)$  das Argument von  $p_k$ , d.h. der Winkel zwischen der  $x$ -Achse und dem Strahl von 0 durch  $p_k$ . Es gilt

$$\theta(p_{k-1}, p_k, 0) = \phi_k - \phi_{k-1} + 2\pi m_k,$$

wobei  $m_k \in \mathbf{Z}$  ist (tatsächlich kommen nur  $m_k \in \{-1, 0, 1\}$  in Frage da  $\phi_k, \phi_{k-1} \in [0, 2\pi)$ , aber dies ist für den Rest des Beweises nicht relevant). Wir erhalten nach Summieren und wegen  $\phi_0 = \phi_n$  (da  $\mathcal{P}$  geschlossen ist!)

$$w(\mathcal{P}, 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \theta(p_{k-1}, p_k, 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n (\phi_k - \phi_{k-1} + 2\pi m_k) = \frac{1}{2\pi} (\phi_n - \phi_0) + \sum_k m_k = \sum_k m_k \in \mathbf{Z}.$$

**Beispiel 3.14.** Wir betrachten den Polygonzug in Beispiel 3.11. Es gilt dann jeweils

$$\theta(p_{k-1}, p_k, 0) = \pi/2$$

für alle  $k = 1, \dots, 4$ . Ferner gilt

$$\phi_k = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$$

für  $k = 0, \dots, 3$  sowie  $\phi_4 = \frac{\pi}{4}$ . Damit ergibt sich in der Notation des obigen Beweises

$$m_k = 0$$

für  $k = 1, 2, 3$  und  $m_4 = 1$ . Wir bestätigen unser Ergebnis für die Windungszahl:

$$w(\mathcal{P}, 0) = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1.$$

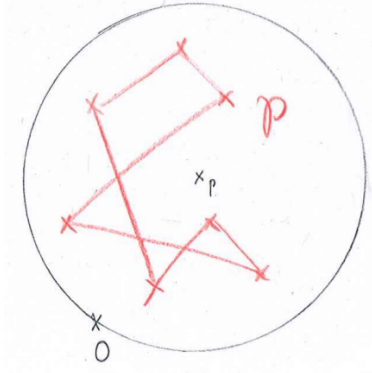
Das folgende Lemma besagt, grob gesagt: wenn eine Schleife "weit genug" von 0 entfernt ist, verschwindet ihre Windungszahl um 0. Wir benötigen es später, wenn wir die Windungszahl allgemein einführen (Definition und Lemma 3.19) und wenn wir zeigen dass die Windungszahl sich nicht ändert, wenn wir eine Schleife stetig deformieren (siehe Theorem 3.24). Die genaue Aussage ist die folgende:

**Lemma 3.15.** Sei  $\mathcal{P}$  ein geschlossener Polygonzug mit der Eigenschaft, dass es ein  $p \in \mathbf{R}^2$  gibt derart, dass

$$\text{supp } \mathcal{P} \subset B_{|p|}(p).$$

Dann ist

$$w(\mathcal{P}, 0) = 0.$$



*Beweis.* Um die Notation etwas zu vereinfachen, drehen wir zunächst den Polygonzug  $\mathcal{P}$  um 0 derart, dass  $p$  auf der  $y$ -Achse liegt. Dies ändert nicht an der Voraussetzung, und auch nicht an der Behauptung, da die einzelnen Drehwinkel  $\theta(p_{k-1}, p_k, 0)$  sich bei einer derartigen Drehung (um 0!) nicht ändern, und damit auch nicht die Windungszahl insgesamt.

Alle Punkte von  $\mathcal{P}$  liegen dann in der oberen Halbebene  $\{(x, y) | y > 0\}$  (sonst wäre ihr Abstand zu  $p$  größer als  $|p|$ ).

Wir zeigen nun folgende Aussage: für einen Polygonzug, dessen Punkte alle in der oberen Halbebene liegen, gilt  $m_k = 0$  für alle  $k$  und insbesondere auch

$$w(\mathcal{P}, 0) = \sum_k m_k = 0.$$

Um dies zu sehen, betrachte die Beispiele a) und b) in Beispiel 3.12: die beiden Punkte  $p_1$  und  $p_2$  liegen beide oberhalb der  $x$ -Achse und damit ist stets

$$\theta(p_1 p_2, 0) = \phi_2 - \phi_1.$$

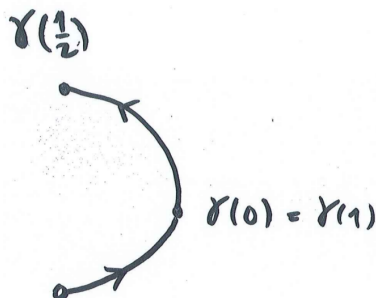
In der Tat, wenn die positive  $x$ -Achse, der Strahl von 0 durch  $p_1$  und der Strahl von 0 durch  $p_2$  (in dieser Reihenfolge) wie bei a) gegen den Uhrzeigersinn angeordnet sind, so ist  $0 < \theta(p_1, p_2, 0) < \pi$  und es gilt die Behauptung. Falls umgekehrt (wie bei b)), die positive  $x$ -Achse, der Strahl durch  $p_2$  und der Strahl durch  $p_1$  gegen den Uhrzeigersinn angeordnet sind, ist  $0 > \theta(p_1, p_2, 0) > -\pi$  und es gilt wiederum die Behauptung. (Im Fall c) hingegen, der durch die obige Annahme in diesem Beweis nicht vorkommen kann, gilt jedoch  $\theta(p_1, p_2, 0) = \phi_2 - \phi_1 - 2\pi$ .  $\square$

### 3.1.3 Windungszahl von stetigen Pfaden

Wir möchten nun den Begriff der Windungszahl für beliebige (stetige) Pfade oder Schleifen definieren. Hierzu werden wir drei wichtige Aspekte der obigen Situation nutzen müssen:

- die *Stetigkeit* von  $\gamma$ : wenn wir z.B. den nicht stetigen "Pfad"

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \gamma(t) := \begin{cases} (\cos(\pi t), \sin(\pi t)) & t \in [0, 1/2] \\ (\cos(\pi(t+1)), \sin(\pi(t+1))) & t \in (1/2, 1] \end{cases}$$



betrachten ist nicht klar, welche Windungszahl man sinnvollerweise einem Sprung um 180 Grad (oder  $\pi$ ) zuweisen sollte.

- die *Kompaktheit* von  $[a, b]$ : betrachten wir die Abbildung

$$(0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(t^{-1}), \sin(t^{-1}))$$

so stellen wir fest, dass sich die Kurve auf ihrem Definitionsbereich unendlich oft um 0 herumwindet, da die Geschwindigkeit immer weiter steigt. (Aus diesem Grund ist es nicht möglich(!), diese Abbildung auf stetige Weise zu  $[0, 1]$  auszudehnen.) ⓘ

- die Tatsache, dass  $[a, b]$  *zusammenhängend* ist, spielt ebenfalls eine wichtige Rolle: würden wir z.B. eine stetige Abbildung

$$\gamma : [0, 1] \sqcup [2, 3] \rightarrow \mathbf{R}^2$$

betrachten, ist nicht klar, wie wir mit dem (möglichen) Sprung von  $\gamma(1)$  zu  $\gamma(2)$  umgehen sollen.

Der genaue Plan, den wir verfolgen werden, ist wie folgt. Sei im folgenden  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$  stets ein Pfad Video 12.05.20  
mit ▶

$$0 \notin \text{supp } \gamma.$$

- (1) Wir zerlegen das Intervall  $[a, b]$  in hinreichend kleine Teilstücke und betrachten den Polygonzug  $\mathcal{P}$ , den wir erhalten indem wir den Pfad  $\gamma$  stückweise linear interpolieren.
- (2) Wir zeigen anschließend, dass die Windungszahl nicht von der Wahl des Polygonzugs abhängt (vorausgesetzt, dass dieser fein genug gewählt ist). Wir definieren die Windungszahl von  $\gamma$  als die Windungszahl eines solchen (genügend feinen) Polygonzugs.

Wir werden hierzu folgende Tatsache aus der Analysis nutzen:

**Satz 3.16.** (*Satz von Heine–Cantor*) Eine stetige Funktion

$$f : K \rightarrow \mathbf{R}^m$$

wobei  $K \subset \mathbf{R}^n$  kompakt ist, ist *gleichmäßig stetig*, d.h. es gibt für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so dass für alle  $x, y \in K$  mit  $|x - y| < \delta$  gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

(Im Gegensatz zur lediglichen Stetigkeit ist hier  $\delta$  nur von  $\epsilon$ , nicht jedoch vom Punkt  $x$  abhängig!)

*Beweis.* Wir führen einen Widerspruchsbeweis: angenommen,  $f$  wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann gäbe es  $\epsilon > 0$ , so dass für jedes  $n \in \mathbf{N}$ ,  $x_n, y_n \in K$  existieren mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n},$$

und

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon.$$

Da  $K$  nach Heine–Borel (Theorem 2.14) abgeschlossen und beschränkt ist, hat die Folge der  $x_n$  eine konvergente Teilfolge  $x_{n_k}$  mit Grenzwert  $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K$ . Wegen der obigen Bedingung gilt auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x$ . Da  $f$  stetig ist, gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = f(x) - f(x) = 0,$$

im Widerspruch zu  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ .  $\square$

Wir beginnen nun mit Schritt (1). Für die weiteren Konstruktionsschritte führen wir zwei Zahlen  $m$  und  $\delta$  ein:

(1) Da  $[a, b]$  kompakt ist, ist

$$m := \min_{t \in [a, b]} |\gamma(t)|$$

ⓘ wohldefiniert und positiv! (Dies ist eine Anwendung vom Zwischenwertsatz, Folgerung 2.17(!)).

(2) Da die Funktion  $\gamma$  nach Satz 3.16 sogar gleichmäßig stetig ist, gibt es ein

$$\delta > 0$$

derart, dass für alle  $t_1, t_2 \in [a, b]$  mit  $|t_1 - t_2| < \delta$  schon

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < m$$

gilt.

Wir betrachten nun eine Zerlegung von  $[a, b]$  in Stücke; formaler betrachten wir eine Folge

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b,$$

wobei  $n \geq 1$ . Wir bezeichnen die Zerlegung mit  $T = (t_0, \dots, t_n)$ . Wir sagen: “ $T$  ist fein genug” wenn

$$\max_{k=1, \dots, n} |t_{k-1} - t_k| < \delta. \quad (3.17)$$

Für eine derartige Zerlegung sei

$$\gamma_T$$

der Weg, der linear zwischen den Punkten  $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_k)$  interpoliert. Genauer definieren wir für  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ :

$$\gamma_T(t) := \frac{t - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} \gamma(t_k) + \frac{t_k - t}{t_k - t_{k+1}} \gamma(t_{k+1}).$$

**Lemma 3.18.** Falls  $T = (t_0, \dots, t_n)$  fein genug ist, so ist

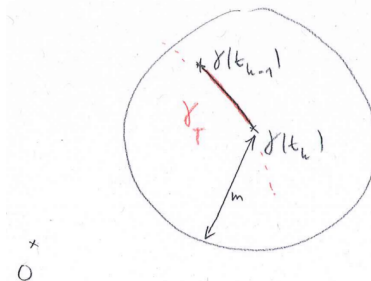
$$\gamma(T) := (\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_n))$$

ein Polygonzug mit der Eigenschaft, dass

$$0 \notin \text{supp } \gamma(T).$$

*Beweis.* Natürlich ist  $\gamma(T)$  nach Definition ein Polygonzug.

Wir müssen zeigen, dass die Strecken  $[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$  0 nicht enthalten: wegen  $|t_k - t_{k-1}| < \delta$  ist  $r_k := |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| < m$ . Die Strecke  $[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$  liegt also in einem Ball mit Radius  $r_k < m$  und  $\gamma(t_k)$ . Ferner ist  $|\gamma(t_k)| \geq m$ , d.h. dieser Ball enthält 0 nicht.



Insbesondere ist auch 0 nicht auf der besagten Strecke.  $\square$

Wir können also die Begriffe und Ergebnisse aus § 3.1.2 anwenden. Wir kommen nun zu (2).

**Definition und Lemma 3.19.** Sind  $T = (t_0, t_1, \dots, t_n)$  und  $S = (s_0, s_1, \dots, s_m)$  Zerlegungen von  $[a, b]$ . Bezeichne mit  $\gamma(T) = (\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_n))$  den Polygonzug der entsteht, wenn man  $\gamma$  auf die Elemente in  $T$  anwendet, und ebenso  $\gamma(S) = (\gamma(s_0), \dots, \gamma(s_m))$ .

Wenn sowohl  $T$  als auch  $S$  fein genug sind (im Sinne von (3.17)), so gilt

$$w(\gamma(T), 0) = w(\gamma(S), 0).$$

Wir definieren dann

$$w(\gamma, 0) := w(\gamma(T), 0),$$

wobei  $T$  genügend feine Zerlegung von  $[0, 1]$  ist.

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage zunächst in dem Fall, dass  $S$  aus  $T$  entsteht, indem ein weiterer Punkt hinzugefügt wird, d.h.

$$\begin{aligned} T &= (t_0, \dots, t_{k-1}, t_k, \dots, t_n), \\ S &= (t_0, \dots, t_{k-1}, s, t_k, \dots, t_n). \end{aligned}$$

(für ein gewisses  $1 \leq k \leq n$  und  $s \in (t_{k-1}, t_k)$ .) Schreibe kürzer  $a := \gamma(t_{k-1})$ ,  $b := \gamma(s)$ ,  $c := \gamma(t_k)$ . Direkt nach Anwenden der Definition und Wegkürzen identischer Terme erhalten wir

$$\begin{aligned} w(\gamma(S), 0) - w(\gamma(T), 0) &= \frac{1}{2\pi} (\theta(a, b, 0) + \theta(b, c, 0) - \theta(a, c, 0)) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\theta(a, b, 0) + \theta(b, c, 0) + \theta(c, a, 0)). \end{aligned}$$

Als Ergebnis erhalten wir die Windungszahl des Polygonzugs  $\mathcal{P} := (a, b, c, a)$ . Es gilt  $|a| \geq m$ ,  $|a-b|$ ,  $|a-c| < m$  nach Wahl von  $m$  und  $\delta$ . Also liegt  $\mathcal{P}$  in einer Kreisscheibe, die 0 nicht enthält. Wegen Lemma 3.15 ist  $w(\mathcal{P}, 0) = 0$ , wie gewünscht.

Seien nun  $S$  und  $T$  beliebig (und beide fein genug). Sei  $U = S \cup T$  die Vereinigung beider Zerlegungen. Dann ist insbesondere auch  $U$  fein genug. Ferner entsteht  $U$  aus  $T$  durch Hinzufügen endlich vieler Punkte. Wegen dem ersten Schritt (und einer Induktion über die Anzahl der Punkte die hinzugefügt wird) gilt  $w(\gamma(U)) = w(\gamma(T))$ . Aus dem gleichen Grund gilt auch  $w(\gamma(U)) = w(\gamma(S))$ , also die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 3.20.** Sei  $n \in \mathbf{Z}$  fixiert. Wir betrachten die Schleife

$$\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}, t \mapsto (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt)).$$

Wir umlaufen also die  $S^1$  mit  $|n|$ -facher Geschwindigkeit, und zwar in mathematisch positivem Drehsinn (gegen den Uhrzeigersinn) für  $n > 0$ , und in negativem Drehsinn für  $n < 0$  (und für  $n = 0$  natürlich die konstante Schleife). Dann gilt

$$w(\gamma_n, 0) = n.$$

In der Tat, es gilt in der Notation von (1) und (2):  $m = 1$ . Für  $\delta$  können wir  $\delta = \frac{1}{6n}$  wählen. (Um dies einzusehen, skizziere man(!) einmal den Kreis um  $(0, 0)$  mit Radius 1, ferner den Kreis um  $(1, 0)$  mit Radius 1 und beachte, dass das Dreieck welches aus  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  und einem der beiden Schnittpunkte der Kreise besteht, gleichseitig ist, d.h. der Winkel zwischen diesen Punkten beträgt 60 Grad, d.h.  $\pi/3$ . D.h. für  $0 \leq t \leq \delta = \frac{1}{6n}$  ist der Abstand zwischen  $\gamma_n(0) = (1, 0)$  und  $\gamma_n(\delta) = (\cos(2\pi n \frac{1}{6n}), \sin(2\pi n \frac{1}{6n})) = (\cos(\frac{\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{3}))$  gerade 1.) !

Wähle eine natürliche Zahl  $N > 6n$  und die Zerlegung  $T = (0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1)$ . Dann ist

$$w(\gamma_n, 0) = w(\gamma_n(T), 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \frac{2\pi n}{N} = n.$$

### 3.2 Homotopie von Pfaden und Schleifen

Wir führen in diesem Abschnitt das Konzept der Homotopie von Schleifen ein. Unser Ausgangspunkt hierbei ist die Beobachtung, dass die Windungszahl eines Weges  $\gamma$  (bezüglich eines Punktes  $p \notin \text{supp } \gamma$ ) in gewissen Fällen nicht von  $\gamma$  abhängt. Hier ist ein Beispiel: beide Schleifen haben Windungszahl 1 bezüglich  $p$ . Die präzise Aussage beweisen wir in Theorem 3.24.



**Video 15.05.20** **Definition 3.21.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. (Für uns ist i.d.R.  $X$  ein Teilraum von  $\mathbf{R}^n$ .) Ein *Pfad* in  $X$  ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow X.$$

Eine *Schleife* in  $X$  ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X$$

mit der Eigenschaft  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Der Punkt  $\gamma(0) \in X$  heißt *Basispunkt* oder *Aufpunkt* der Schleife.

Wir hatten im letzten Kapitel die Situation einer Schleife  $\gamma$  in  $\mathbf{R}^2$  betrachtet mit  $p \notin \text{supp } \gamma$ . In der Sprechweise von Definition 3.21 handelt es sich also hierbei genau um Schleifen in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{p\}$ .

Hier ist die zentrale Definition dieses Abschnitts, sie wird uns noch lange begleiten:

**Definition 3.22.** Sei  $X$  ein topologischer Raum (z.B. eine Teilmenge von  $\mathbf{R}^n$  mit der induzierten Topologie). Zwei Pfade  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow X$  mit gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkten ( $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ ,  $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ ) heißen *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung (eine sog. *Homotopie*)

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$$

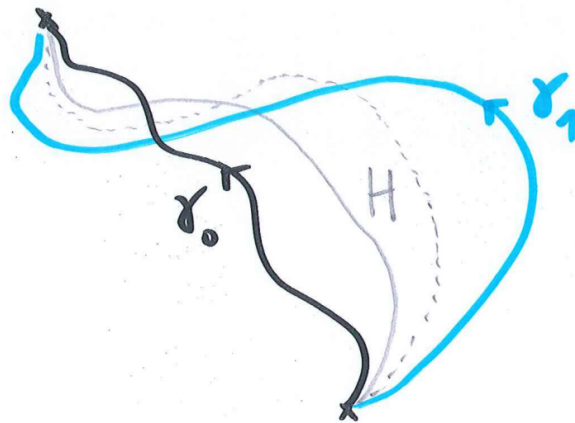
gibt, so dass gilt:

- (1)  $H(s, t) = \gamma_t(s)$  für alle  $s \in [a, b]$  und  $t = 0, t = 1$
- (2)  $H(a, t) = \gamma_0(a) (= \gamma_1(a))$ ,  $H(b, t) = \gamma_0(b) (= \gamma_1(b))$  für alle  $t \in [0, 1]$ .

Falls die Pfade homotop sind, schreiben wir auch kurz

$$\gamma_0 \sim \gamma_1.$$



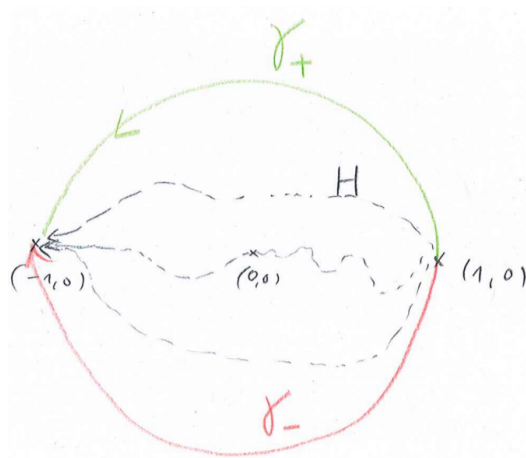


**Bemerkung 3.23.** • Besonders oft wenden wir die Definition an, wenn die beiden Pfade  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  sogar Schleifen (mit dem gleichen Basispunkt) sind.

- Die Bedingung (1) kann man umschreiben mit der Idee, dass  $H$  stetig zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  interpoliert. Stetigkeit ist (wie immer!) entscheidend hierbei.
- (2) besagt, dass der Anfangs- und Endpunkt im Zuge der Interpolation fest bleibt. Auch dies ist entscheidend: Übungsaufgabe 3.9 besagt dass der Begriff der Homotopie ansonsten bedeutungslos wäre. Im Beweis von Theorem 3.24 sehen wir, wie dieser Teil der Definition benutzt wird.
- Wenn wir davon sprechen, dass zwei Pfade (oder Schleifen) homotop sind, sagen wir meistens nicht mehr explizit dazu, dass die Anfangs- und Endpunkte übereinstimmen, d.h.  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ ,  $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ .
- Die Angabe des topologischen Raumes ist ebenfalls wichtig: in  $\mathbf{R}^2$  sind beispielsweise *alle* Pfade homotop, ein Spezialfall von Übungsaufgabe 3.10. Insbesondere sind die beiden Pfade

$$\gamma_{\pm} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \gamma_{\pm}(t) := (\cos(\pm\pi t), \sin(\pm\pi t)).$$

homotop. Fassen wir sie jedoch als Pfade in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  auf, werden wir in Kürze (Folgerung 3.35) sehen, dass sie *nicht homotop* sind. Die intuitive Idee ist: jede Homotopie, die in  $\mathbf{R}^2$  existiert, muss zu einem gewissen Zeitpunkt den Punkt  $(0, 0)$  "überstreichen". Damit ist sie als Homotopie in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  nicht zulässig.



Es ist nun nicht schwer, allherhand homotope Schleifen anzugeben. Weniger leicht ist es zu zeigen, dass zwei gegebenen Schleifen *nicht* homotop sind. Hierzu gibt das folgende Theorem eine Handhabe, denn wenn

wir für zwei Schleifen feststellen sollten, dass  $w(\gamma, 0) \neq w(\gamma', 0)$  gilt, so besagt das Theorem, dass  $\gamma$  nicht zu  $\gamma'$  homotop ist. Dieses Wissen werden wir in Kürze anwenden z.B. beim Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (Theorem 3.25).

**Theorem 3.24.** Seien  $\gamma$  und  $\gamma' : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  zwei Pfade in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ , die (ebenfalls in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ ) homotop sind. Dann gilt

$$w(\gamma, 0) = w(\gamma', 0).$$

In Worten: Die Windungszahl homotoper Pfade sind gleich. Insbesondere sind die Windungszahlen homotoper Schleifen gleich.

*Beweis.* Sei  $H : Q := [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  die Homotopie zwischen  $\gamma$  und  $\gamma'$ . Die Beweisstrategie besteht darin,  $Q := [0, 1] \times [0, 1]$  durch hinreichend kleine Rechtecke zu überdecken.

Wir wählen (ganz ähnlich zum Vorgehen bei der Definition der Windungszahl stetiger Pfade):

- $m := \min_{(s,t) \in Q} |H(s,t)|$  existiert und ist positiv (hier benutzen wir, dass das Bild von  $H$  0 nicht enthält!)
- Da  $H$  (wieder nach Satz 3.16) gleichmäßig stetig ist, gibt es ein  $\delta > 0$  so dass für  $|s_1 - s_2| < \delta$  und  $|t_1 - t_2| < \delta$  gilt:

$$|H(s_1, t_1) - H(s_2, t_2)| < m.$$

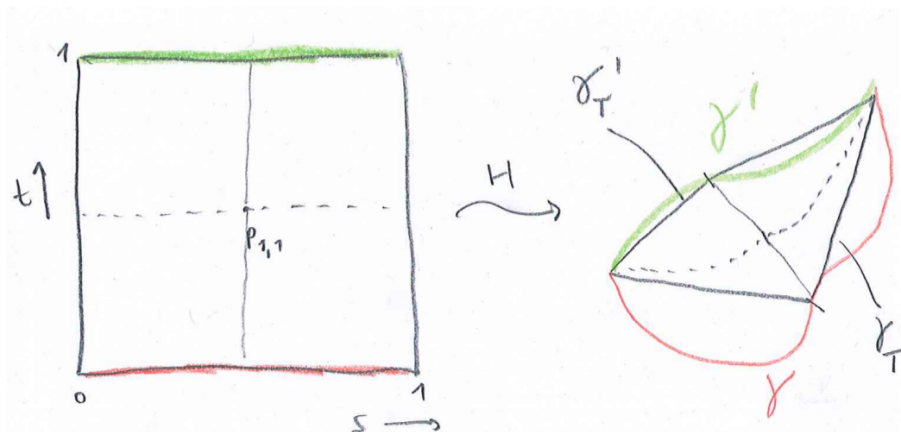
Wähle  $N > \frac{1}{\delta}$ ,  $N \in \mathbf{N}$ . Betrachte die Zerlegung  $T = (0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1)$ . Insbesondere ist diese Zerlegung  $T$  fein genug für  $\gamma$  und  $\gamma'$  im obigen Sinne (siehe bei (3.17)). Es gilt also nach Definition und Lemma 3.19  $w(\gamma, 0) = w(\gamma(T), 0)$  sowie  $w(\gamma', 0) = w(\gamma'(T), 0)$ .

Betrachte die Zerlegung des Quadrats  $Q$  in  $N^2$  gleich große Quadrate mit Seitenlänge  $\frac{1}{N}$ . Wir bezeichnen die Ecken dieser Zerlegung mit  $p_{k,l} := (\frac{k}{N}, \frac{l}{N})$ , wobei  $0 \leq k, l \leq N$ . Für  $1 \leq k, l \leq N$  definiere einen geschlossenen Polygonzug

$$\mathcal{P}_{k,l} = (H(p_{k-1,l-1}), H(p_{k,l-1}), H(p_{k,l}), H(p_{k-1,l}), H(p_{k-1,l-1})).$$

D.h.  $\mathcal{P}_k$  ist die lineare Interpolation der Homotopie (in dem Teilquadrat). Nach Konstruktion gilt  $|H(p_{k,l})| \geq m$  sowie dass die übrigen Ecken  $H(p_{k,l-1}), H(p_{k,l}), H(p_{k-1,l-1})$  von  $H(p_{k-1,l-1})$  alle Abstand  $< m$  haben. Damit ist der Polygonzug  $\mathcal{P}_{k,l}$  vollständig in einem Ball enthalten, der 0 nicht enthält. Es gilt daher  $w(\mathcal{P}_{k,l}, 0) = 0$  nach Lemma 3.15. Insgesamt erhalten wir  $\sum_{k,l=1}^N w(\mathcal{P}_{k,l}, 0) = 0$ . Andererseits gilt aber

$$w(\gamma(T), 0) - w(\gamma'(T), 0) = \sum_{k=1}^{N^2} w(\mathcal{P}_k, 0).$$



$N=2$

In der Tat: für  $0 < k < N$  werden die Streckenzüge von  $H(p_{k,l})$  nach  $H(p_{k,l-1})$  werden in dieser Summation je einmal hin- und einmal zurück durchlaufen. Somit leisten sie keinen Beitrag für die Summe der Windungszahlen. Das gleiche gilt auch für die Streckenzüge  $H(p_{k-1,l})$  nach  $H(p_{k,l})$  für alle  $0 < l < N$ . Für  $k = 0$  und  $k = N$  gilt  $H(p_{k,l}) = H(p_{k,l-1})$  da die Homotopie die Endpunkte fest hält (wichtig!, vgl. Übungsaufgabe 3.9). Es bleiben also nur die Beiträge für  $l = 0$  und  $l = N$  übrig. Für diese beachte: für  $l = 0$  ist der Streckenzug  $H(p_{k,l-1})$  nach  $H(p_{k,l})$  gerade ein Teil von  $\gamma(T)$ , analog für  $l = N$  und  $\gamma'(T)$ .  $\square$

### 3.2.1 Anwendung: Der Fundamentalsatz der Algebra

**Theorem 3.25.** (*Fundamentalsatz der Algebra*) Sei

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

ein nicht konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten, d.h.  $a_j \in \mathbf{C}$ . Dann gibt es eine komplexe Zahl  $x \in \mathbf{C}$  mit

$$f(x) = 0.$$

Zur Einordnung: in der Analysis zeigt man, dass Polynome  $f(x)$  mit *ungeradem* Grad und reellen Koeffizienten  $a_j \in \mathbf{R}$  eine Nullstelle haben. Hierzu

- zeigt man  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  falls  $a_n > 0$  (und  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$  falls  $a_n < 0$ ),
- und wendet den Zwischenwertsatz (Folgerung 2.17) an, um die Existenz einer (reellen) Nullstelle zu folgern.

Wie wir gesehen haben, ist der Zwischenwertsatz letztlich eine Aussage über kompakte und zusammenhängende Teilmengen in  $\mathbf{R}$ . Das Vorgehen für den Fundamentalsatz der Algebra ist ähnlich, nur dass wir statt dem ziemlich groben Konzept “zusammenhängend” die feinere Idee “Homotopie von Schleifen” verwenden werden.

*Beweis.* Der Grad von  $f$  sei  $n (\neq 0)$ , d.h.  $a_n \neq 0$ . Um die Notation zu vereinfachen, dürfen wir annehmen dass  $a_n = 1$  ist (teile ansonsten  $f$  durch  $a_n$ ).

Angenommen,  $f$  hätte keine Nullstelle, wäre also eine stetige(!) Abbildung

$$f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^\times := \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

Für  $R \in \mathbf{R}^{\geq 0}$ , betrachten wir nun die Schleife

$$\phi_R : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^\times, s \mapsto f(R \exp(2\pi i s)).$$

(Als Verknüpfung stetiger Funktionen ist  $\phi_R$  stetig, ferner ist  $\phi_R(0) = \phi_R(1)$ .)

- (1) Für  $R = 0$  ist  $\phi_0$  die konstante Schleife mit Aufpunkt  $f(0)$ . Ihre Windungszahl um 0 ist daher 0:  $w(\phi_0, 0) = 0$ .
- (2) Für beliebiges  $R \in \mathbf{R}^{\geq 0}$  gilt

$$w(\phi_R, 0) = w(\phi_0, 0).$$

In der Tat, es gilt für jede konstante Schleife  $\rho$ :  $w(\rho, 0) = 0$ , dies wenden wir auf  $\phi_0$  und auch die konstante Schleife  $\phi'_R : s \mapsto f(R)$  an. Die Schleife  $s \mapsto R \exp(2\pi i s)$  ist, da  $\mathbf{C}$  konvex ist, homotop zur konstanten Schleife  $s \mapsto R$ . Damit ist (Übungsaufgabe, oder siehe Definition und Lemma 3.27, Punkt (2)) die Schleife  $\phi_R$  (in  $\mathbf{C}^\times \cong \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ !) homotop zur konstanten Schleife  $s \mapsto f(R)$ . Laut Theorem 3.24 gilt daher  $w(\phi_R, 0) = w(\phi'_R, 0)$ .

- (3) Für  $R \gg 0$  ist  $\phi_R \sim R\gamma_n$ , d.h. homotop zur Schleife, die  $n$  mal um die  $S^1$  herumwindet, vgl. Beispiel 3.20, um den Faktor  $R$  gestreckt.

Die Homotopie zwischen diesen Schleifen liefert (wieder laut Theorem 3.24)

$$w(\phi_R, 0) = w(R\gamma_n, 0) = n.$$



Aus diesen drei Punkten ergibt sich der gewünschte Widerspruch, da  $n \neq 0$  ( $f$  ist nicht konstant).

Zu (3): wir wählen  $R$  so, dass

$$R > 2 \max\{|a_0|, \dots, |a_n|\}.$$

Dann ist für  $z \in S^1$ :

$$|(Rz)^n| = R^n > \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| R^j = \sum_{j=0}^{n-1} |a_j (Rz)^j| \geq \left| \sum_{j=0}^{n-1} a_j (Rz)^j \right|.$$

Die Strecke zwischen  $(Rz)^n$  und

$$f(Rz) = (Rz)^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j (Rz)^j$$

ist also komplett in  $\mathbf{C}^\times$  enthalten. Mit anderen Worten:

$$H(z, t) : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^\times, (z, t) \mapsto t(Rz)^n + (1-t)f(z)$$

ist eine stetige Abbildung, nimmt Werte in  $\mathbf{C}^\times$  an (wichtig!) und erfüllt  $H(z, 0) = f(Rz)$  sowie  $H(z, 1) = (Rz)^n$ . Wir erhalten also eine Homotopie zwischen  $\phi_R$  und der Schleife  $R\gamma_n, t \mapsto R\gamma_n(t)$ . Es gilt ferner  $w(\gamma_n, 0) = w(R\gamma_n)$  (siehe Übungsaufgabe 3.8).  $\square$

### 3.2.2 Anwendung: Der Brouwersche Fixpunktsatz

Der Brouwersche Fixpunktsatz ist in gewissem Sinn ein großer Bruder des Zwischenwertsatzes: aus einer topologischen Eigenschaft eines topologischen Raums und der Stetigkeit einer Funktion wird die Existenz einer Lösung einer Gleichung (bzw. eines Gleichungssystems in zwei Variablen) gefolgert. Im Zwischenwertsatz ist der relevante Raum ein abgeschlossenes Intervall  $[a, b] \in \mathbf{R}$ , bei Brouwer geht es um

$$D^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

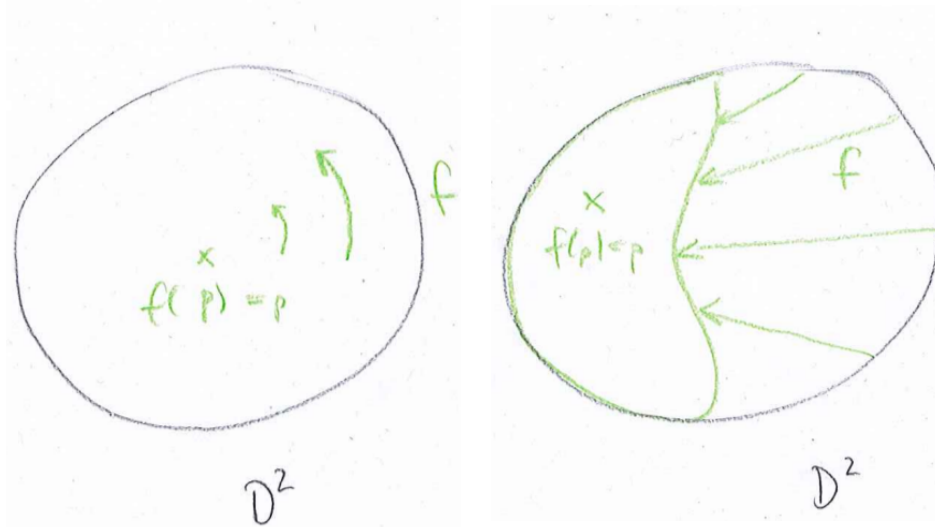
den abgeschlossenen Ball mit Radius 1 in  $\mathbf{R}^2$ .

**Theorem 3.26.** (*Brouwerscher Fixpunktsatz*) Jede stetige Abbildung

$$f : D^2 \rightarrow D^2$$

hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein  $p \in D^2$  mit

$$f(p) = p.$$



Eine Drehung um 0 hat 0 als Fixpunkt.

Eine stetige Abbildung, die  $D^2$  "zusammenstaucht".

Zum Beweis des Satzes benötigen wir etwas Vorbereitung. Die folgende Beobachtung ist ganz allgemeiner Natur.

**Definition und Lemma 3.27.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von topologischen Räumen.

(1) Für eine Schleife  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  in  $X$  (mit Aufpunkt  $x \in X$ ) ist die Komposition

$$f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow Y$$

ebenfalls eine Schleife, das sog. *direkte Bild* von  $\gamma$  unter  $f$  (oder auch der *Pushforward*). Wir bezeichnen diese Schleife mit  $f_*(\gamma)$  (lies “ $f$  unten Stern von  $\gamma$ .”)

(2) Die Abbildung  $\gamma \mapsto f_*(\gamma)$  ist mit der Homotopierelation verträglich, d.h. für  $\gamma \sim \gamma'$  gilt auch

$$f_*(\gamma) \sim f_*(\gamma').$$

*Beweis.* Diese Aussagen sind jeweils unmittelbare Folgerungen der Tatsache, dass Kompositionen stetiger Abbildungen wieder stetig sind (Übungsaufgabe 2.6). Beispielsweise zeigt man (2) wie folgt: sei

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

die Homotopie zwischen  $\gamma$  und  $\gamma'$ . Dann ist die Komposition mit  $f$ ,

$$f_*(H) := f \circ H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$$

eine Homotopie zwischen  $f_*(\gamma)$  und  $f_*(\gamma')$ : zunächst ist  $f \circ H$  ebenfalls stetig, die Endpunkte werden festgehalten, d.h.  $(f_*H)(0, t) = f(H(0, t)) = f(x)$ , ebenso mit  $(f_*H)(1, t)$ . Außerdem ist  $(f_*H)(s, 0) = f(H(s, 0)) = f(\gamma(s))$ , analog mit  $\gamma'$ , d.h.  $H$  ist eine Homotopie wie gewünscht.  $\square$

Die zweite Vorbereitung für den Satz von Brouwer hat spezifisch mit der Geometrie der Scheibe  $D^2$  und ihrem Rand  $S^1$  zu tun.

**Lemma 3.28.** Es gibt keine *stetige* Abbildung  $r : D^2 \rightarrow S^1$  mit der Eigenschaft

$$r \circ i = \text{id},$$

wobei  $i : S^1 \rightarrow D^2$  die natürliche Inklusion ist. (Der Buchstabe  $r$  steht für “*Retrakt*”.)

**Bemerkung 3.29.** Wie immer ist das Wörtchen “stetig” hier entscheidend. Man skizziert leicht(!) eine nicht stetige Abbildung  $r$ , die die Bedingungen des Lemmas erfüllt. ❗

In eine andere Richtung vergleiche man die Aussage hier mit der (vgl. Übungsaufgabe 2.16), dass es keine stetige surjektive Abbildung  $[0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$  gibt.

*Beweis.* Wir nehmen an, es gäbe eine solche (stetige!) Abbildung  $r$  und leiten einen Widerspruch her.

Betrachte die Schleife  $\gamma_1$ , die einmal gegen den Uhrzeigersinn um die  $S^1$  herumläuft, sowie die Schleife  $\gamma_0$ , die konstant bei  $(1, 0) \in S^1$  verharrt (siehe Beispiel 3.20).

In  $D^2$  haben wir eine Homotopie, die diese Schleife auf die Schleife zusammenzieht, die konstant bei  $(1, 0)$  verharrt:

$$H : [0, 1] \times [0, 1], (s, t) \mapsto H(s, t) := t(1, 0) + (1 - t)\gamma_1(s).$$

Hierbei benutzen wir, dass  $D^2$  konvex ist und damit der Punkt  $H(s, t)$  stets in  $D^2$  liegt. Außerdem ist  $H$  stetig und erfüllt die übrigen Bedingungen an eine Homotopie. Wir halten fest:

$$\gamma_0 \sim \gamma_1,$$

wobei die Homotopie hier als Homotopie von Schleifen in  $D^2$  verstanden ist.

Laut Definition und Lemma 3.27 ist dann  $r \circ H$  eine Homotopie (in  $S^1$ ) zwischen  $r \circ \gamma_0$  und  $r \circ \gamma_1$ . Andererseits ist wegen  $r|_{S^1} = \text{id}$  auch  $r \circ \gamma_1 = \gamma_1$  und ebenso mit  $\gamma_0$ . Wir würden also eine Homotopie (diesmal in  $S^1$ !) zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  erhalten. Insbesondere wäre (wegen  $S^1 \subset \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ ) dies auch eine stetige Homotopie zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ . Hieraus würde folgen (Theorem 3.24)

$$1 = w(\gamma_1, 0) = w(\gamma_0, 0) = 0,$$

der gewünschte Widerspruch.  $\square$

*Beweis.* (von Theorem 3.26) Wir nehmen an, dass  $f(p) \neq p$  für alle  $p \in D^2$  ist. Dann betrachten wir den Strahl  $L_p$ , der von  $f(p)$  ausgeht und durch  $p$  geht. (Beachte: er ist wohldefiniert, da  $f(p) \neq p$ .) Wir zeigen:

(1) Die Teilmenge

$$(S^1 \cap L_p) \setminus \{f(p)\}$$

hat genau ein Element, dieses bezeichnen wir mit  $r(p)$ . (D.h.  $L_p$  hat (eventuell abgesehen von  $f(p)$ ) genau einen Schnittpunkt mit  $S^1$ .)

(2) Die Abbildung  $D^2 \rightarrow S^1, p \mapsto r(p)$  ist stetig.

(3) Die Einschränkung von  $r$  auf  $S^1$  ist die Identität, d.h.  $r(p) = p$  für  $p \in S^1 (\subset D^2)$ .

Diese Behauptungen liefern den gewünschten Widerspruch wegen Lemma 3.28.

Diese Behauptungen kann man auf verschiedene Weisen sehen; wir nutzen eine explizite Rechnung. In [CS66, §28] ist ein schönes geometrisches Argument angegeben. Wir nutzen, dass

$$r(p) = f(p) + a_p(p - f(p)),$$

wobei  $a_p \geq 0$  die Zahl ist, so dass

$$|f(p) + a_p(p - f(p))| = 1$$

ist (d.h.  $f(p) + a_p(p - f(p)) \in S^1$ ). Diese Gleichung ist auch äquivalent zu

$$\begin{aligned} 1 &= |f(p) + a_p(p - f(p))|^2 \\ &= |f(p)|^2 + 2\langle f(p), a_p(p - f(p)) \rangle + |a_p(p - f(p))|^2 \\ &= |f(p)|^2 + 2a_p\langle f(p), p - f(p) \rangle + (a_p)^2|p - f(p)|^2. \end{aligned}$$

(Hierbei nutzen wir die allgemeine Formel  $|v + w|^2 = |v|^2 + 2\langle v, w \rangle + |w|^2$  für zwei Vektoren  $v, w \in \mathbf{R}^2$ , wobei  $\langle v, w \rangle$  das Skalarprodukt bezeichnet. Man prüft sie leicht durch explizites Nachrechnen(!).) Für fixiertes  $p$  (und damit  $f(p)$ ) ist dies eine quadratische Gleichung in  $a_p$ . Ihre Lösungen sind

$$a_p = \frac{-\langle f(p), p - f(p) \rangle \pm \sqrt{\langle f(p), p - f(p) \rangle^2 - |p - f(p)|^2(|f(p)|^2 - 1)}}{|p - f(p)|^2}.$$

Wegen  $|f(p)| \leq 1$  ist der Ausdruck in der Wurzel *größer gleich* als  $\langle f(p), p - f(p) \rangle^2$ , damit ist die Lösung mit “+” (statt “-”) die eindeutige nicht-negative Lösung der Gleichung. Als Verkettung von polynomialen Ausdrücken und Wurzeln ist  $p \mapsto a_p$  stetig, also ist auch  $p \mapsto r(p)$  stetig! Für  $p \in S^1$  ist schließlich  $r(p) = p$ , da dann  $p$  ein Schnittpunkt von  $L_p$  mit  $S^1$  ist. Mit anderen Worten: es gilt  $r|_{S^1} = \text{id}$ .  $\square$

### 3.3 Komposition von Schleifen

**Video 22.05.20** Theorem 3.24 besagt, dass wir einer Schleife  $\gamma$  in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  (auf sehr sinnvolle und interessante Weise!) eine ganze Zahl zuordnen können, nämlich die Windungszahl  $w(\gamma, 0)$ . Ganze Zahlen kann man addieren (und multiplizieren, dies wird für uns hier jedoch weniger wichtig sein). Diese Tatsache ist natürlich sehr grundlegend für die ganzen Zahlen und wir suchen daher nach einer Entsprechung der Addition auf der Seite der Schleifen. Diese Entsprechung wird die Komposition von Schleifen sein, die wir nun einführen.

*Sei im folgenden stets  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$  ein fixierter Punkt. Wenn nichts anderes gesagt ist, haben alle Schleifen in  $X$  den Basispunkt  $x$ .*

**Definition 3.30.** Die *konstante Schleife* mit Basispunkt  $x$  ist definiert als

$$e_x : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto x.$$

Eine Schleife  $\gamma$ , die homotop zu  $e_x$  ist, heißt *nullhomotop*.

Für eine Schleife  $\gamma$  definieren wir eine weitere Schleife

$$\gamma^{-1} : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto \gamma(1 - t).$$

(Die Notation  $\gamma^{-1}$  suggeriert, dass es sich um eine Art Inverses handelt, dies ist im Moment noch nicht gerechtfertigt.)

Um die Komposition zu etablieren, benötigen wir ein Lemma. Man könnte es umschreiben indem man sagt: die Verklebung stetiger Abbildungen ist wieder stetig.

**Lemma 3.31.** Seien  $X$  ein topologischer Raum und

$$X = A \cup B$$

eine Überdeckung durch zwei *abgeschlossene*<sup>1</sup> Teilmengen  $A$  und  $B$  (die wir wie immer mit der Teilraumtopologie versehen). Sei  $Z$  ein topologischer Raum. Seien  $f : A \rightarrow Z$  und  $g : B \rightarrow Z$  stetige Abbildungen mit der Eigenschaft dass

$$f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}.$$

(D.h.  $f(x) = g(x)$  für ein  $x \in A \cap B$ .) Dann ist die Abbildung

$$t : X = A \cup B \rightarrow Z, x \mapsto t(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

(wohldefiniert und) *stetig*.

*Beweis.* Nach Voraussetzung an  $f$  und  $g$  ist  $t$  wohldefiniert. Wir zeigen dass  $t$  stetig ist.


Wir nutzen hierzu folgende Tatsache: eine Abbildung  $e : S \rightarrow T$  zwischen topologischen Räumen ist stetig genau dann, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. In der Tat, für  $U \subset T$  offen ist

$$e^{-1}(T \setminus U) = e^{-1}(T) \setminus e^{-1}(U) = S \setminus e^{-1}(U)$$

genau dann abgeschlossen, wenn  $e^{-1}(U)$  offen ist.

Sei also  $V \subset Z$  abgeschlossen. Wir zeigen, dass  $t^{-1}(V)$  abgeschlossen in  $X$  ist:

$$t^{-1}(V) = \underbrace{f^{-1}(V)}_{\text{abgeschlossen in } A} \cup \underbrace{g^{-1}(V)}_{\text{abgeschlossen in } B}.$$

Also ist  $f^{-1}(V)$  abgeschlossen in  $A$ , und nach Voraussetzung  $A \subset X$  ebenfalls abgeschlossen. Damit ist  $f^{-1}(V)$  in  $X$  abgeschlossen.(!) Ebenso ist auch  $g^{-1}(V)$  abgeschlossen in  $X$ , also auch die obige Vereinigung.  $\square$  

**Definition und Lemma 3.32.** Seien  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$  Pfade in  $X$  mit

$$\gamma_0(1) = \gamma_1(0).$$

Dann ist die *Komposition* der Pfade


$$\gamma_1 \circ \gamma_0 : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto \begin{cases} \gamma_0(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_1(2(t - \frac{1}{2})) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

wieder ein Pfad.

Man liest dies als “ $\gamma_1$  nach  $\gamma_0$ ,” mit der Idee, dass zunächst  $\gamma_0$  (mit doppelter Geschwindigkeit) durchlaufen wird, danach  $\gamma_1$ .

(Insbesondere, wenn  $\gamma_0, \gamma_1$  Schleifen mit dem gleichen Basispunkt  $x$  sind, so ist auch  $\gamma_1 \circ \gamma_0$  eine Schleife mit Basispunkt  $x$ !)

*Beweis.* Bezeichne diese Abbildung mit  $\gamma := \gamma_1 \circ \gamma_0$ . Beachte zunächst, dass die Definition von  $\gamma$  für  $t = \frac{1}{2}$  wohldefiniert ist, da  $\gamma_0(1) = \gamma_1(0) = x$  nach Voraussetzung. Außerdem gilt  $\gamma(0) = \gamma(1)$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $\gamma$  eine stetige Abbildung ist. Die Abbildungen  $\tilde{\gamma}_0 : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow X, t \mapsto \gamma_0(2t)$  und  $\tilde{\gamma}_1 : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow X, t \mapsto \gamma_1(2(t - \frac{1}{2}))$  sind stetig(!) (als Komposition welcher stetiger Abbildungen?) Wir wenden Lemma 3.31 auf  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1$  an und erhalten die Stetigkeit von  $\gamma$ .  $\square$  

<sup>1</sup>Die Aussage von Lemma 3.31 ist (mit einem ähnlichen Beweis) auch richtig, wenn  $A$  und  $B$  beide offen in  $X$  sind. Fordert man jedoch keine derartigen Eigenschaften, ist die Aussage falsch: z.B. für  $X = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x \in \mathbf{R}, x < 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$  und  $f(a) = 1, g(b) = 0$  ist die Abbildung  $t$ , die man so erhält, *nicht* stetig.



**Bemerkung 3.33.** Diese Verknüpfung hat einige fremdartige Eigenschaften:

- (1) die Verknüpfung mit dem konstanten Weg  $e_x$  gibt einen neuen Weg: für eine Schleife  $\gamma$  mit Aufpunkt  $x$  ist i.A.

$$e_x \circ \gamma \neq \gamma,$$

denn z.B. für  $t = \frac{3}{4}$  ist  $(e_x \circ \gamma)(\frac{3}{4}) = e_x(\frac{1}{2}) = x$  im Allgemeinen ungleich  $\gamma(\frac{3}{4})$ . Ebenso ist auch

$$\gamma \circ e_x \neq \gamma.$$

- (2) Außerdem ist für drei Schleifen auch

$$(\gamma_2 \circ \gamma_1) \circ \gamma_0 \neq \gamma_2 \circ (\gamma_1 \circ \gamma_0).$$

- (3) Für eine Schleife  $\gamma$  mit Aufpunkt  $x$  gilt

$$\gamma^{-1} \circ \gamma \neq e_x,$$

$$\gamma \circ \gamma^{-1} \neq e_x.$$

Die Wege links durchlaufen  $\gamma$  einmal vorwärts, anschließend rückwärts (jeweils mit doppelter Geschwindigkeit), während rechts der Weg konstant bei  $x$  verharret.

- (4) Für zwei Schleifen  $\gamma_1$  und  $\gamma_0$  gilt im Allgemeinen

$$\gamma_1 \circ \gamma_0 \neq \gamma_0 \circ \gamma_1.$$

### 3.3.1 Komposition und Homotopie von Schleifen

Wir könnten uns hier enttäuscht abwenden, denn die Kompositionen von Schleifen zu betrachten, scheint keine sehr guten Eigenschaften zu haben. Die Windungszahl unterscheidet, wie wir in Theorem 3.24 gesehen haben, jedoch nicht zwischen homotopen Schleifen. Dies bringt uns zu der Idee, Homotopieklassen von Schleifen zu verknüpfen. In der Tat sehen wir schon dass zumindest das Problem bei 41 und 42 nur von der ungeschickten Wahl der Geschwindigkeit herrührt.

**Lemma 3.34.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\gamma$  etc. Schleifen mit dem gleichen Basispunkt  $x \in X$ . Dann gilt

- (1) Homotopie von Schleifen (bzw. allgemeiner sogar von Pfaden) ist eine Äquivalenzrelation, d.h. es gilt

(a)  $\gamma \sim \gamma$ ;

(b)  $\gamma_0 \sim \gamma_1$  ist äquivalent zu  $\gamma_1 \sim \gamma_0$

(c) für  $\gamma_0 \sim \gamma_1, \gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_0 \sim \gamma_2$

- (2) Die Homotopierelation ist mit der Komposition von Pfaden verträglich in dem Sinne dass für homotope Pfade  $\gamma \sim \gamma'$  und  $\delta \sim \delta'$  auch deren Kompositionen homotop sind:

$$\gamma \circ \delta \sim \gamma' \circ \delta'.$$

(3)  $\gamma \circ \gamma^{-1} \sim e_x, \gamma^{-1} \circ \gamma \sim e_x,$

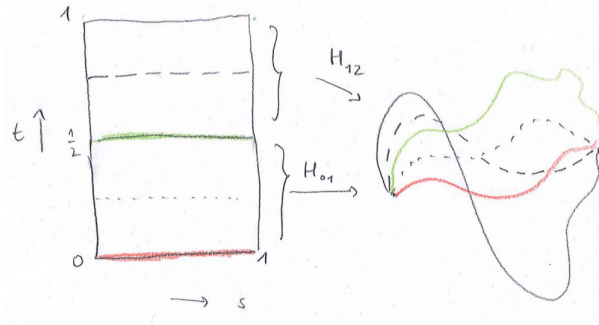
(4)  $\gamma \circ e_x \sim \gamma, e_x \circ \gamma \sim \gamma,$

(5)  $(\gamma_2 \circ \gamma_1) \circ \gamma_0 \sim \gamma_2 \circ (\gamma_1 \circ \gamma_0).$

*Beweis.* All diese Aussagen werden bewiesen, indem eine explizite Homotopie angegeben wird. Für ?? sei  $H_{01} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  eine Homotopie zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  und ebenso  $H_{12}$  eine Homotopie zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ . Definiere eine Abbildung

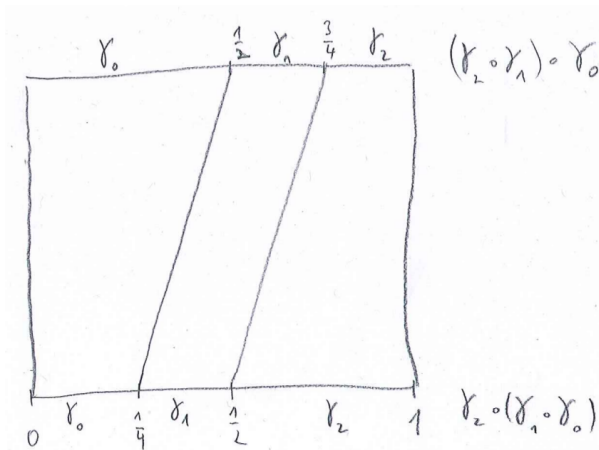
$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, (s, t) \mapsto \begin{cases} H_{01}(s, 2t) & t \in [0, 1/2], \\ H_{12}(s, 2(t - \frac{1}{2})) & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$





Wir zeigen, ganz ähnlich wie im Beweis von Definition und Lemma 3.32, dass  $H$  eine Homotopie zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  ist. Zunächst ist die Abbildung wohldefiniert, da  $H_{01}(1, t) = \gamma_1(t) = H_{12}(0, t)$ . Auch die Endpunkte sind festgehalten, d.h.  $H(0, t) = H_{01}(0, t) = \gamma_0(0) (= \gamma_1(0) = \gamma_2(0))$  sowie  $H(1, t) = \gamma_0(1) (= \gamma_1(1) = \gamma_2(1))$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Die Abbildung  $H$  ist stetig aufgrund von Lemma 3.31.

Für (5) ist hier eine bildliche Beweisidee, die formale Ausformulierung ist eine Übungsaufgabe, siehe Übungsaufgabe 3.6.



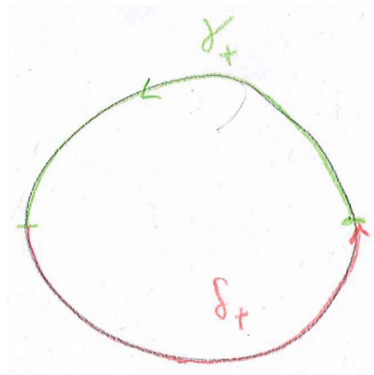
Eine kleine Anwendung (vgl. Bemerkung 3.23):

**Folgerung 3.35.** Die Pfade

$$\gamma_{\pm} : [0, 1] \rightarrow S^1, \gamma_{\pm}(t) := (\cos(\pm\pi t), \sin(\pm\pi t))$$

(mit Anfangspunkt  $(1, 0)$  und Endpunkt  $(-1, 0)$ ) sind in  $S^1$  nicht homotop.

*Beweis.* Betrachte den Pfad  $\delta_{\pm}$ , der durch Spiegeln am Ursprung aus  $\gamma_{\pm}$  entsteht.



Etwas formaler:

$$\delta_{\pm} : [0, 1] \rightarrow S^1, \delta_{\pm}(t) := (-\cos(\pm\pi t), -\sin(\pm\pi t)) = (\cos(\pm\pi(t+1)), \sin(\pm\pi(t+1))).$$

Dann ist  $\delta_+ \circ \gamma_+ = \gamma_{+1}$ , wobei  $\gamma_n$  die o.g. Schleife in  $S^1$  ist. Ebenso ist  $\delta_- \circ \gamma_- = \gamma_{-1}$ .

Wäre  $\gamma_+ \sim \gamma_-$ , so würde diese Homotopie durch Spiegeln am Ursprung auch eine Homotopie zwischen  $\delta_+$  und  $\delta_-$  liefern(!). Wir würden dann erhalten

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \delta_+ \circ \gamma_+ \\ &\sim \delta_- \circ \gamma_- \\ &= \gamma_{-1}, \end{aligned}$$

denn Kompositionen von Pfaden sind mit Homotopie verträglich (Lemma 3.34,(2)). Wegen  $w(\gamma_{\pm 1}, 0) = \pm 1$  ist dies ein Widerspruch zu Theorem 3.24.  $\square$

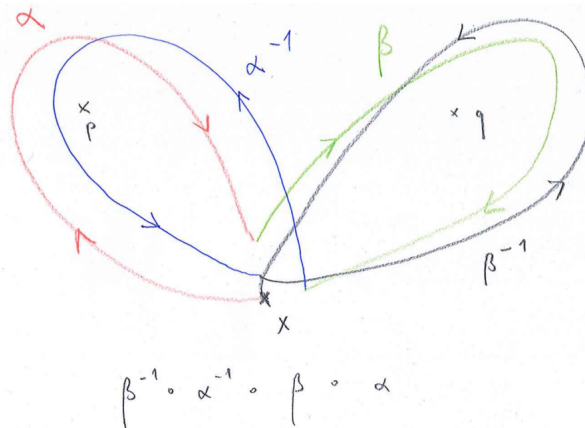
**Bemerkung 3.36.** Die Beobachtung, dass die Komposition i.A. ganz wesentlich von der Reihenfolge abhängt (wir sagen “die Komposition ist nicht kommutativ”, ist jedoch *kein* Fehler im System, sondern eher ein interessantes Feature: betrachte hierzu die “Nägel” (in der Sprechweise von Frage 1.4)

$$p = (-1, 0), q = (1, 0) \in \mathbf{R}^2$$

sowie die “Medaille”  $x = (0, -3)$ . Betrachte zwei Schleifen  $\alpha$  und  $\beta$ , die vom Aufpunkt  $x$  jeweils genau einmal  $p$  bzw.  $q$  umrunden wie in der Skizze (die Windungszahl sind  $w(\alpha, x) = -1$  sowie  $w(\beta, x) = -1$ , man hätte auch genau so gut Schleifen mit Windungszahl  $+1$  nehmen können). Wie wir noch sehen werden, ist

$$\gamma := \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha$$

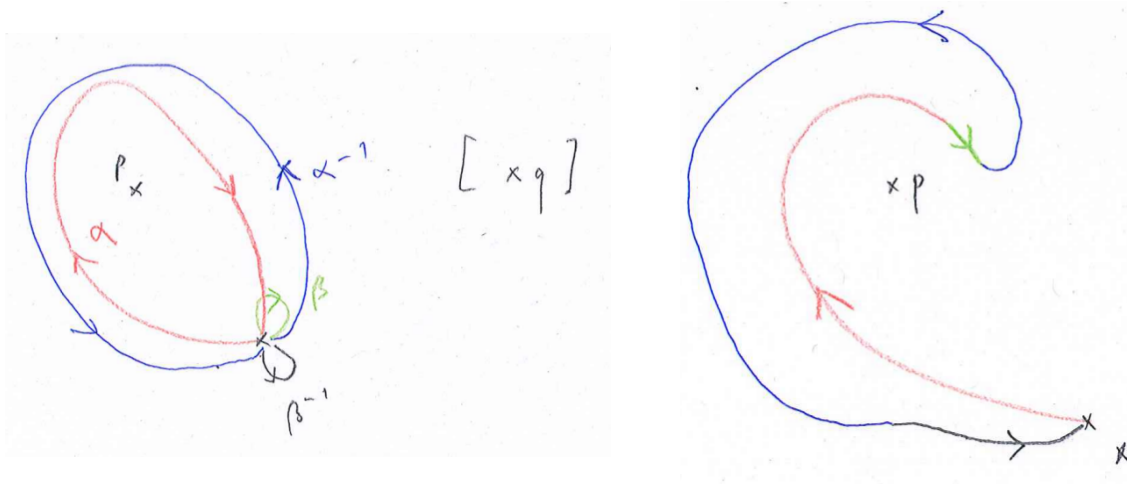
eine Lösung für unser Medaillenproblem!



(Der Klarheit halber sind in der Skizze die Schleifen  $\alpha$  und  $\alpha^{-1}$  ein wenig nebeneinander gezeichnet und die Enden jeweils ein wenig neben den Aufpunkt  $x$  gezeichnet.)

Die nicht-triviale Tatsache, die wir im Moment noch nicht beweisen können ist die Behauptung, dass die Schleife  $\gamma$  in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{p, q\}$  *nicht* nullhomotop, d.h. nicht homotop zur konstanten Schleife  $e_x$  ist. Anschaulich ist das wieder recht einleuchtend, und physikalisch entspricht diese Behauptung der Tatsache, dass die Nägel das Band halten. Einen formalen Beweis können wir später mit Hilfe des Satzes von van Kampen (Theorem 4.32) führen.

Was wir nun jedoch zumindest bereits verstehen ist folgendes: wenn wir einen Nagel, sagen wir  $q$  entfernen, betrachten wir also als topologische Raum nun  $\mathbf{R}^2 \setminus \{p\}$ . In *diesem* Raum ist  $\gamma$  nullhomotop: dies kann man sich entweder bildlich veranschaulichen:



Wir halten fest:  $\beta$  ist in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{p\}$  nullhomotop, ebenso auch  $\beta^{-1}$ . Die Rechenregeln in Lemma 3.34 besagen nun (alle Homotopien sind in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{p\}$  gemeint)

$$\begin{aligned} \gamma &:= \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha \\ &\sim e_x \circ \alpha^{-1} \circ e_x \circ \alpha \\ &\sim \alpha^{-1} \circ \alpha \\ &\sim e_x. \end{aligned}$$

Wir erhalten also noch einmal, auf etwas anderem Wege, die Tatsache, dass  $\gamma$  (in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{p\}$ ; und ebenso natürlich in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{q\}$ ) nullhomotop ist. D.h. entfernen wir einen der beiden Nägel, fällt das Band herunter!

## 3.4 Abstrakte Gruppen

Wie in der Einleitung skizziert ist die Strategie der algebraischen Topologie, topologische Fragen zu beantworten, indem sie in algebraische Fragen überführt werden und diese dann beantwortet werden. In diesem Kapitel lernen wir einiges Handwerkszeug, um derartige algebraischen Fragen zu behandeln. Gruppen sind jedoch keineswegs nur als Mittel für die algebraische Topologie relevant, sondern kommen in unheimlich vielen mathematischen und nicht-mathematischen Gebieten vor. Schau dir doch einmal den Artikel [https://en.wikipedia.org/wiki/Group\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Group_(mathematics)) zu dem Thema an!

Video 26.05.20



### 3.4.1 Definition und erste Beispiele

**Definition 3.37.** Eine *Gruppe* ist eine Menge  $G$ , zusammen mit einer Abbildung

$$\circ : G \times G \rightarrow G,$$

die folgenden Bedingungen (die sog. *Gruppenaxiome*) genügt. Hierbei schreiben wir  $g \circ h$  für das Bild von  $(g, h)$  unter der Abbildung  $\circ$ .

(1) Die Verknüpfung ist *assoziativ*, d.h. für alle  $g, h, i \in G$  gilt

$$g \circ (h \circ i) = (g \circ h) \circ i.$$

(2) Es gibt ein Element  $e \in G$  mit der Eigenschaft

$$e \circ g = g, g \circ e = g$$

für alle  $g \in G$ . Solch ein Element heißt *neutrales Element*.

(3) Für jedes Element  $g \in G$  existiert ein Element welches mit  $g^{-1}$  bezeichnet wird, so dass

$$g \circ g^{-1} = e, \quad g^{-1} \circ g = e.$$

Ein Element mit dieser Eigenschaft heißt *inverses Element* von  $g$ .

**Beispiel 3.38.** Wir kennen aus der linearen Algebra folgende Beispiele (eventuell ohne sie als Gruppen bezeichnet zu haben). Was sind jeweils neutrales Element und Inverse?



- Wenn  $k$  ein Körper ist (z.B.  $k = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  oder  $\mathbf{Q}$ ) so ist die Menge  $k$  zusammen mit der Addition  $+$  eine Gruppe.  $0 \in k$  ist das neutrale Element und  $-x$  das Inverse von  $x$ . Dies sieht man sofort(!) durch Vergleichen der Definitionen.

Außerdem ist die Menge  $k^\times := k \setminus \{0\}$  versehen mit der Multiplikation  $\cdot$  eine Gruppe.

- Für einen Körper  $k$  ist die Menge  $k^\times$  versehen mit der Addition *keine* Gruppe, da für  $x, y \neq 0$  die Summe  $x + y$  nicht unbedingt  $\neq 0$  ist. Daher, wenn wir von  $k^\times$  (z.B.  $\mathbf{R}^\times$ ) sprechen, ist als Gruppenoperation stets die Multiplikation gemeint. Man spricht auch von der *multiplikativen Gruppe* von  $k$ .
- Wenn  $V$  ein Vektorraum ist, so ist  $V$  mit der Addition versehen ebenfalls eine Gruppe. Auch die ganzen Zahlen  $\mathbf{Z}$ , mit der Addition versehen, sind eine Gruppe.

**Definition 3.39.** Die sog. *triviale Gruppe* hat nur ein Element 1 (welches auch das neutrale Element ist). Wir bezeichnen sie mit  $\{1\}$ .

**Definition 3.40.** Eine Gruppe  $(G, \circ)$  heißt *abelsch*, wenn für alle  $g, h \in G$  gilt:

$$g \circ h = h \circ g.$$

**Definition und Lemma 3.41.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $x \in X$  ein fixierter Punkt. Dann ist die Menge

$$\pi_1(X, x) := \{\text{Schleifen in } X \text{ mit Aufpunkt } x\} / \text{Homotopie}$$

eine Gruppe, wobei die Gruppenoperation durch die Komposition von Schleifen bestimmt ist. Die Gruppe heißt *Fundamentalgruppe* von  $X$  (mit *Basispunkt* oder *Aufpunkt*  $x$ ).

*Beweis.* Dies ist genau der Inhalt von Lemma 3.34:

- Zunächst ist Homotopie eine Äquivalenzrelation, damit ist die Menge der Äquivalenzklassen wohldefiniert. Zur Erinnerung (dies gilt für jede Äquivalenzrelation): die Elemente in  $\pi_1(X, x)$  sind die Mengen (alle Schleifen mit Basispunkt  $x$ )

$$[\gamma] := \{\text{Schleifen } \delta \text{ mit } \delta \sim \gamma\}.$$

- Die Verknüpfung  $\circ$  auf  $\pi_1(X, x)$ , die durch

$$[\gamma] \circ [\gamma'] := [\gamma \circ \gamma']$$

definiert ist, ist wohldefiniert.

- Es gilt  $[\gamma] \circ ([\gamma'] \circ [\gamma'']) = ([\gamma] \circ [\gamma']) \circ [\gamma'']$  (Assoziativität). Außerdem ist  $[e_x]$  das neutrale Element:  $[e_x] \circ [\gamma] = [\gamma] = [\gamma] \circ [e_x]$ . Schließlich ist  $[\gamma^{-1}] \circ [\gamma] = [\gamma] \circ [\gamma^{-1}]$ . Also sind alle Gruppenaxiome erfüllt.  $\square$

Während die zuvor erwähnten Gruppen alle abelsch sind, ist die Fundamentalgruppe in vielen Fällen nicht abelsch. Beispielsweise werden wir sehen dass die Fundamentalgruppe von  $\mathbf{R}^2 \setminus \{p, q\}$  für zwei verschiedene Punkte  $p \neq q \in \mathbf{R}^2$  nicht abelsch ist; dies hatten wir bereits im Zusammenhang mit dem Medaillenproblem angedeutet, siehe Bemerkung 3.36. Abelsche Gruppen sind *deutlich* einfacher zu verstehen als nicht-abelsche Gruppen.

**Beispiel 3.42.** Sei  $M$  eine Menge. Wir betrachten die Menge

$$\text{Aut}(M) := \{f : M \rightarrow M \text{ bijektiv}\}$$

und versehen sie mit der Komposition als Gruppenoperation, d.h. für  $f, g \in \text{Aut}(M)$  ist die Verknüpfung  $f \circ g$  die folgende Abbildung

$$f \circ g : m \mapsto f(g(m)).$$

Man prüft sofort(!) nach, dass auch  $f \circ g$  wieder eine Bijektion ist.

Das neutrale Element in  $\text{Aut}(M)$  ist die Abbildung  $\text{id}_M : m \mapsto m$ . Inverse sind gegeben durch die Umkehrabbildung (hier wird benötigt, dass in  $\text{Aut}(M)$  nur Bijektionen und nicht beliebige Abbildungen  $M \rightarrow M$  enthalten sind). Man prüft dann ohne Schwierigkeiten nach(!), dass  $\text{Aut}(M)$  eine Gruppe ist. Sobald  $M$  mehr als 2 Elemente hat, ist  $\text{Aut}(M)$  nicht abelsch(!).

Dieses Beispiel liefert noch zahlreiche weitere, ebenfalls nicht abelsche Beispiele:

**Beispiel 3.43.** Sei  $V$  ein Vektorraum (über einem fixierten Körper  $k$ ). Die Menge

$$\text{GL}(V) := \{f : V \rightarrow V \text{ bijektiv und } k\text{-linear}\}$$

ist die sog. *allgemeine lineare Gruppe* von  $V$ . Sie ist wieder mit der Komposition eine Gruppe; neutrales Element und Inverse sind wie in  $\text{Aut}(M)$ .

**Beispiel 3.44.** Für  $n \geq 1$  und einen Körper  $k$  ist die Menge

$$\text{GL}_n(k) := \{A \in \text{Mat}_{n \times n}, A \text{ invertierbar}\}$$

ebenfalls eine Gruppe, versehen mit der Matrizenmultiplikation. (Aus der linearen Algebra wissen wir, dass Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums  $V$  sich nach Wahl einer Basis durch Matrizen beschreiben lassen, daher ist dieses Beispiel in Wahrheit ein Spezialfall des vorigen Beispiels.)

### 3.4.2 Gruppenhomomorphismen

Wie vor Definition 2.12 erwähnt, ist man an strukturerhaltenden Abbildungen zwischen mathematischen Objekten interessiert. Wir definieren daher:

**Definition 3.45.** Seien  $(G, \circ)$  und  $(H, \star)$  zwei Gruppen. Ein *Gruppenhomomorphismus* oder kurz *Homomorphismus* ist eine Abbildung  $f : G \rightarrow H$  (von Mengen) mit der Eigenschaft, dass

$$f(g \circ g') = f(g) \star f(g')$$

für alle  $g, g' \in G$  gilt.

Ein Homomorphismus  $f : G \rightarrow H$  heißt *Gruppenisomorphismus* oder kurz *Isomorphismus*, falls es Gruppenhomomorphismus

$$m : H \rightarrow G$$

gibt, so dass die beiden Kompositionen die jeweiligen Identitätsabbildungen sind, d.h.

$$m \circ f = \text{id}_G, \quad f \circ m = \text{id}_H.$$

**Lemma 3.46.** Ein Gruppenhomomorphismus  $f : G \rightarrow H$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn  $f$  bijektiv ist.

*Beweis.* “ $\Rightarrow$ ”: wenn es einen Gruppenhomomorphismus  $g : H \rightarrow G$  gibt mit  $f \circ g = \text{id}_H$  und  $g \circ f = \text{id}_G$ , so ist  $f$  natürlich bijektiv.

“ $\Leftarrow$ ”: für einen bijektiven Homomorphismus  $f : G \rightarrow H$  ist die Umkehrabbildung  $f^{-1} : H \rightarrow G$  ebenfalls ein Gruppenhomomorphismus (im Gegensatz zu einer beliebigen Abbildungen, die die Gruppenstruktur nicht berücksichtigt). In der Tat, die Behauptung

$$f^{-1}(h \star h') = f^{-1}(h) \circ f^{-1}(h')$$

ist äquivalent zu

$$f(f^{-1}(h \star h')) = f(f^{-1}(h) \circ f^{-1}(h'))$$

da  $f$  bijektiv ist. Letztere Gleichung gilt: beide Seiten sind gleich  $h \star h'$ , für die rechte Seite benutze hierzu dass  $f$  ein Homomorphismus ist, so dass  $f(f^{-1}(h) \circ f^{-1}(h')) = f(f^{-1}(h)) \star f(f^{-1}(h')) = h \star h'$ .  $\square$

**Lemma 3.47.** Sei  $f : G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt  $f(e_G) = e_H$  sowie  $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$  für alle  $g \in G$ .

*Beweis.* Dies folgt aus

$$f(e) = f(e \circ e) = f(e) \star f(e).$$

Anwenden von  $f(e)^{-1} \star -$  auf beide Seiten der Gleichung und Benutzung der Assoziativität liefert

$$e_H = f(e)^{-1} \star f(e) = (f(e)^{-1}) \star f(e) \star f(e) = f(e_G).$$

❗ Der Beweis der zweiten Aussage ist ähnlich(!).  $\square$

Also bewahrt ein Gruppenhomomorphismus nicht nur die Gruppenoperation (nach Definition), sondern auch neutrales Element und Inverses und damit die gesamte Struktur in einer Gruppe.

**Beispiel 3.48.** (1) Eine lineare Abbildung

$$f : V \rightarrow W$$

zwischen zwei Vektorräumen erfüllt

$$f(v' + v'') = f(v') + f(v'')$$

für alle  $v', v'' \in V$  gilt. (Darüberhinaus wird noch gefordert dass  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$  für  $\lambda \in k$  und  $v \in V$  gilt, dieser Teil der Definition ist für die folgende Diskussion jedoch nicht relevant.) Damit ist eine lineare Abbildung (insbesondere) ein Gruppenhomomorphismus

$$f : (V, +) \rightarrow (W, +).$$

(2) Die Abbildung

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^2$$

ist *kein* Gruppenhomomorphismus bezüglich der Addition, denn es gilt i.A.

$$f(x + y) = (x + y)^2 \neq x^2 + y^2 = f(x) + f(y).$$

(3) Die Abbildung

$$f : (\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow (\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot), x \mapsto x^2$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, denn es gilt

$$f(x \cdot y) = (xy)^2 = x^2 \cdot y^2 = f(x) \cdot f(y).$$

(4) Die Exponentialabbildung

$$\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^\times := \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

erfüllt die Gleichung

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y). \quad (3.49)$$

Also: die Addition in  $\mathbf{R}$  wird unter der Exponentialabbildung zur Multiplikation in  $\mathbf{R}^\times$ . Demnach handelt es sich bei

$$\exp : (\mathbf{R}, +) \rightarrow (\mathbf{R}^\times, \cdot)$$

um einen Gruppenhomomorphismus. Die tragende Rolle dieser Funktion in der Mathematik geht aus Übungsaufgabe 3.18 hervor.

### 3.5 Die Fundamentalgruppe von $S^1$

Das Ziel dieses Abschnitts ist folgende Aussage. Wir erhalten hiermit das erste Beispiel einer nicht-trivialen (d.h. interessanten!) Fundamentalgruppe.

[Video 29.05.20](#)



**Theorem 3.50.** Die Abbildungen

$$\begin{aligned} w : \pi_1(S^1, 1) &\rightarrow \mathbf{Z}, \\ [\gamma] &\mapsto w(\gamma, 0) \end{aligned}$$

[Video 09.06.20](#)



und

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbf{Z} &\rightarrow \pi_1(S^1, 1), \\ n &\mapsto [\gamma_n] \end{aligned}$$

sind zueinander inverse Gruppenisomorphismen. (Hierbei bezeichnet wie oben  $[\gamma]$  die Äquivalenzklasse von  $\gamma$  bezüglich der Homotopie-Äquivalenzrelation  $\sim$ .) Wie in Beispiel 3.20 ist hier

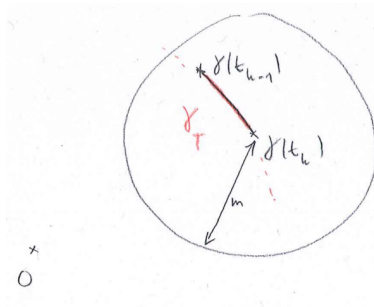
$$\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}, t \mapsto (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt))$$

die Schleife, die die  $S^1$  mit  $|n|$ -facher Geschwindigkeit umläuft, und zwar in mathematisch positivem Drehsinn (gegen den Uhrzeigersinn) für  $n > 0$ , und in negativem Drehsinn für  $n < 0$  (und für  $n = 0$  natürlich die konstante Schleife).

Für den Beweis werden wir die folgenden beiden Lemmata benutzen. Ein wichtiger Schritt des Beweises wird darin bestehen, eine Schleife in  $S^1$  mittels Lemma 3.51 durch eine polygonale Approximation zu ersetzen. Da diese polygonale Approximation nur eine Schleife in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  ist, benötigen wir außerdem Lemma 3.52, welches uns sicherstellt, dass wir eine gewisse Homotopie in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  wieder auf eine Homotopie in  $S^1$  zurückführen können.

**Lemma 3.51.** Sei  $\gamma$  eine Schleife in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  und betrachte eine genügend feine Approximation von  $\gamma$  durch eine polygonale Schleife  $\gamma_T$ , die in Lemma 3.18 diskutiert wurde. Dann ist  $\gamma$  (in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ ) homotop zu  $\gamma_T$ .

*Beweis.* Die Stücke  $[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$  sind jeweils homotop zu  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ , da der nach Definition von “genügend fein” existierende Ball (siehe Skizze) konvex ist (Übungsaufgabe 3.10).



Damit sind auch die Kompositionen dieser Stücke,  $\gamma$  bzw.  $\gamma_T$ , homotop zueinander. (Streng genommen haben wir die Komposition von Pfaden in Definition und Lemma 3.32 nur definiert, wenn sie als Definitionsbereich  $[0, 1]$  haben. Diese Definition lässt sich für die Zwecke dieses Beweises ohne Mühe abwandeln zu einer Komposition zweier Pfade  $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow X$ ,  $\gamma_1 : [b, c] \rightarrow X$ ,  $\gamma_1 \circ \gamma_0 : [a, c] \rightarrow X$ . Dies auszuschreiben bleibt dir überlassen (!) ). □

**Lemma 3.52.** Seien  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  zwei Schleifen in  $S^1$ . Diese Schleifen sind in  $S^1$  homotop genau dann, wenn sie in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  homotop sind.

*Beweis.* “ $\Rightarrow$ ”: eine Homotopie  $H : [0, 1]^2 \rightarrow S^1$  zwischen diesen Schleifen ist natürlich auch eine Homotopie mit Werten in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ .

“ $\Leftarrow$ ”: Sei nun umgekehrt  $H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  eine Homotopie zwischen den Schleifen. Dann ist die Abbildung

$$\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1, (s, t) \mapsto \frac{H(s, t)}{|H(s, t)|}$$

eine Homotopie zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  in  $S^1$ . In der Tat: zunächst ist die Abbildung  $\tilde{H}$  wohldefiniert, da  $|H(s, t)| > 0$ . Sie nimmt nach Konstruktion Werte in  $S^1$  an. Außerdem ist sie stetig, da die Abbildung  $[0, 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}^{>0}, (s, t) \mapsto |H(s, t)|$  stetig ist(!) und damit auch die obige Division von  $H$  durch diese Werte. Außerdem gilt für Punkte  $(s, t)$  mit  $H(s, t) = \tilde{H}(s, t)$ , so dass insbesondere  $\tilde{H}(s, 0) = \gamma_0(s)$  und ebenso mit  $\gamma_1$ . Ferner ist  $\tilde{H}(0, t) = \tilde{H}(1, t) = \gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ , d.h. Anfangs- und Endpunkt werden festgehalten. Damit ist  $\tilde{H}$  eine Homotopie (in  $S^1$ !) zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$ .  $\square$

Im Beweis des Theorems werden wir folgende Sprechweise benutzen:

**Definition 3.53.** Sei  $\mathcal{P} = (p_0, \dots, p_n)$  ein Polygonzug. Dann ist der zu  $\mathcal{P}$  assoziierte polygonale Weg  $\gamma_{\mathcal{P}}$  definiert als

$$\gamma_{\mathcal{P}} : [0, 1] \rightarrow \text{supp } \mathcal{P}$$

$$t \mapsto n \left( \frac{k+1}{n} - t \right) p_k + n \left( t - \frac{k}{n} \right) p_{k+1} \quad \text{für } t \in [k/n, (k+1)/n].$$

(d.h. die Punkte  $\frac{k}{n} \mapsto p_k$  und dazwischen ist  $\gamma_{\mathcal{P}}$  stückweise linear).

*Beweis.* (von Theorem 3.50)

(1) Bezeichne die Abbildung  $n \mapsto [\gamma_n]$  mit  $\Gamma$ . Wir zeigen, dass  $\Gamma$  ein Gruppenhomomorphismus ist, d.h.

$$\Gamma(n+m) = \Gamma(n) \circ \Gamma(m)$$

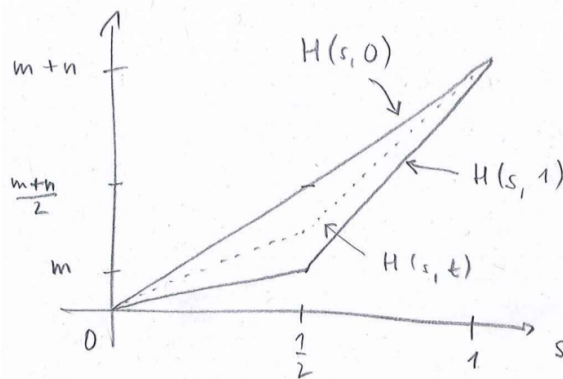
für alle  $n, m \in \mathbf{Z}$ . Da die Elemente in  $\pi_1(S^1, 1)$  Homotopieklassen von Schleifen (im Gegensatz zu Schleifen selbst) sind, bedeutet diese Behauptung:

$$\gamma_{n+m} \sim \gamma_n \circ \gamma_m.$$

(Hierbei steht  $\sim$  für Homotopie von Schleifen in  $S^1$ .) Wir konstruieren eine Homotopie zwischen  $\gamma_n \circ \gamma_m$  mittels folgender Abbildung:

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$$

$$H(s, t) := \begin{cases} t \cdot 2sm + (1-t) \cdot 2s \frac{n+m}{2} & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ t \cdot (m + (2s-1)n) + (1-t) \cdot 2s \frac{n+m}{2} & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$



Dann ist  $H$  eine Homotopie zwischen  $\delta_0 : s \mapsto s(m+n)$  und  $\delta_1 : s \mapsto 2sm$  für  $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$  und  $s \mapsto m + (2s-1)n$  sonst. (!), wieso ist  $H$  stetig? Sei außerdem  $e : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  die Abbildung  $s \mapsto \exp(2\pi i s)$ . Dann ist laut Definition und Lemma 3.27, (2)  $e_*(H)$  eine Homotopie zwischen  $\gamma_n \circ \gamma_m = e_*(\delta_1)$  (für  $t = 1$ ; beachte hierfür  $\gamma_n \circ \gamma_m(s) = \gamma_n(2s-1) = \exp(2\pi i n(2s-1))$  für  $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ . Letzteres ist gleich  $\exp(2\pi i(m + n(2s-1))) = e_*(\delta_1)(s)$ ) und  $\gamma_{n+m} = e_*(\delta_0)$  (für  $t = 0$ ).



- (2) Die Abbildung  $[\gamma] \mapsto w(\gamma, 0)$  ist wohldefiniert, d.h. die Windungszahl ist nur von der Homotopieklasse abhängig. Dies ist gerade die Aussage von Theorem 3.24.
- (3) Die Komposition

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{\Gamma} \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{w} \mathbf{Z}$$

ist die Identität, denn  $w(\gamma_n, 0) = n$  (siehe Beispiel 3.20).

- (4) Es bleibt zu zeigen, dass die andere Komposition  $\Gamma \circ w$  ebenfalls die Identität ist. Sobald dies gezeigt ist, ist  $\Gamma$  demnach bijektiv und damit nach Lemma 3.46 ein Gruppenisomorphismus.

Wir müssen also zeigen, dass für jede Schleife  $\delta$  in  $S^1$  eine Homotopie

$$\delta \sim \gamma_n$$

besteht, wobei  $n := w(\delta, 0) (\in \mathbf{Z})$ .

Die Beweisstrategie hierfür ist die folgende:

- Wir führen diese Behauptung auf eine ähnliche Behauptung für eine polygonale Schleife zurück.
- Wir passen diese polygonale Schleife an, indem wir einige "harmlose" Zwischenstücke einfügen.
- Wir zerlegen diesen so angepassten polygonalen Schleife in geschlossene Polygonzüge, die nur aus 3 Ecken bestehen.
- Für solche dreieckigen Polygonzüge zeigen wir die Behauptung durch eine explizite Konstruktion.

Zu (4)a: betrachte die Schleife  $\delta_T$ , die in Lemma 3.18 als genügend feine polygonale Approximation an  $\delta$  betrachtet wurde. Laut Lemma 3.51 besteht in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  eine Homotopie zwischen  $\delta$  und  $\delta_T$ . Laut Theorem 3.24 gilt  $n = w(\delta_T, 0)$ . Wir zeigen im folgenden, dass es in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  eine Homotopie

$$\delta_T \sim \gamma_n \tag{3.54}$$

gibt. Da die Homotopierelation transitiv ist (Lemma 3.34) erhalten wir eine Homotopie in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  zwischen  $\delta$  und  $\gamma_n$ . Laut Lemma 3.52 sind diese Schleifen dann auch in  $S^1$  homotop. (Dieses letzte Argument ist notwendig da  $\delta_T$  keine Schleife in  $S^1$  sondern nur in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  ist!) Alle folgenden Homotopien sind in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  zu verstehen.

Zu (4)b: die Schleife  $\delta_T$  wird durch einen Polygonzug definiert, sagen wir  $\mathcal{P} = (p_0, p_1, \dots, p_r)$ . Um (3.54) zu zeigen, dürfen wir annehmen, dass für alle  $k$  gilt:

$$p_k \neq (-1, 0). \tag{3.55}$$

In der Tat, falls  $p_k = (-1, 0) = \gamma(t_k)$  sowie  $\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_{k+1}) \neq (-1, 0)$ , so können wir den Polygonzug durch Hinzufügen von  $t_k \pm \epsilon$  für genügend kleines  $\epsilon > 0$  verfeinern und anschließend  $t_k$  weglassen. Der erhaltene Polygonzug ist (für genügend kleines  $\epsilon > 0$ ) immer noch fein genug und enthält den Punkt  $(-1, 0)$  nicht mehr.

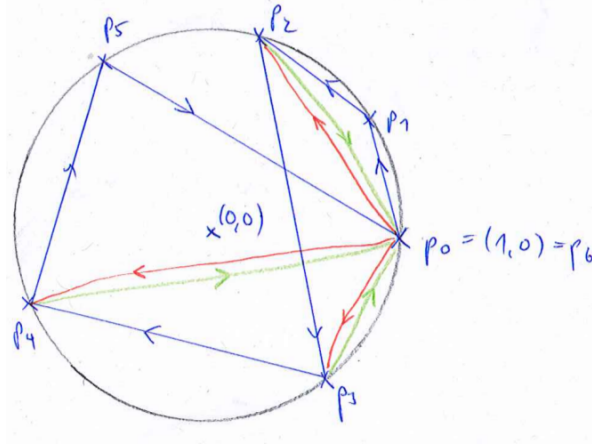
Wegen (3.55) folgt:

$$(0, 0) \notin [1, p_k]. \tag{3.56}$$

Deswegen ist der Polygonzug (schreibe  $1 := (1, 0) = p_0 = p_r$ )

$$\mathcal{Z} := (p_0 = 1, p_1, p_2, 1, p_2, p_3, 1, \dots, 1, p_{k-1}, p_k, 1, \dots, p_r = 1)$$

ein Polygonzug, dessen Träger in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  liegt. Die polygonale Schleife  $\rho_{\mathcal{Z}}$ , die zu  $\mathcal{Z}$  assoziiert ist, ist (in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ ) homotop zu  $\delta_T$ , da die Streckenzüge  $[p_{k-1}, 1]$  sowie  $[1, p_k]$  hinzugefügt werden und die Komposition der Pfade  $[1, p_k]$  und  $[p_k, 1]$  laut Lemma 3.34(3) nullhomotop ist.



(In der Skizze sind die Strecken von 1 zu  $p_k$  und zurück zur besseren Erkennbarkeit nebeneinander gezeichnet.)

Die Behauptung (3.54) ist also äquivalent zu

$$\rho_Z \sim \gamma_n.$$

Zu (4)c: es ist nach Konstruktion  $\rho_Z$  (vgl. Übungsaufgabe 3.4) homotop zur Komposition der Schleifen  $\rho_Z$  die zu den Polygonzügen

$$Z_k := (1, p_{k-1}, p_k, 1)$$

assoziiert sind.

Wir greifen hierfür auf die Notation im Beweis von Lemma 3.13 zurück: sei  $\phi_k \in [0, 2\pi)$  das Argument von  $p_k$ , d.h. der Winkel zwischen der  $x$ -Achse und dem Strahl von 0 durch  $p_k$ . Es gilt für  $1 \leq k \leq n$ :

$$\theta(p_{k-1}, p_k, 0) = \phi_k - \phi_{k-1} + 2\pi m_k, \quad (3.57)$$

mit  $m_k \in \{-1, 0, 1\}$ . Außerdem gilt  $n = \sum_{k=1}^r m_k$ .

Außerdem ist (Schritt (1), s.o.) wegen  $n = \sum_k m_k$  die Schleife  $\gamma_n$  homotop zur Komposition  $\gamma_{m_1} \circ \dots \circ \gamma_{m_r}$ . Da Kompositionen von Pfaden mit Homotopien verträglich sind (Lemma 3.34) genügt es also eine Homotopie (in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ )

$$\rho_{Z_k} \sim \gamma_{m_k}$$

anzugeben.

Zu (4)d: Wir haben die Behauptung (3.54) also schlussendlich auf folgende Aussage zurückgeführt: für einen dreieckigen Polygonzug

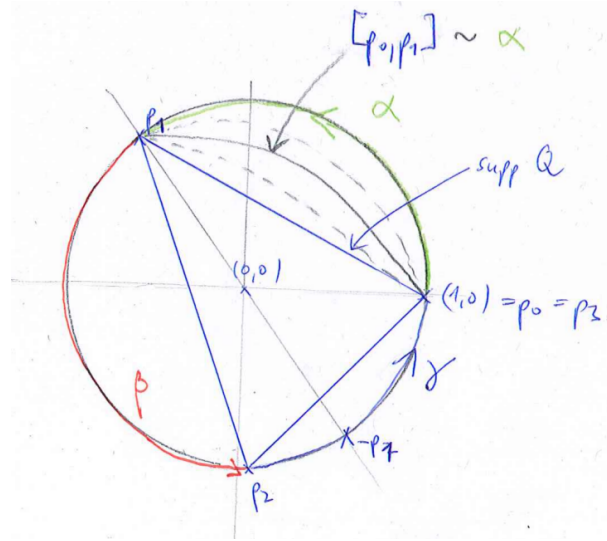
$$Q = (1, p_1, p_2, 1)$$

(so wie  $Z_k$ ) mit Windungszahl  $m (\in \{-1, 0, 1\})$  ist der zu  $Q$  assoziierte polygonale Weg  $\rho$  homotop zu  $\gamma_m$ .

Aus dem Beweis von Lemma 3.15 wissen wir: liegen die Punkte eines Polygonzugs  $Q$  alle in der oberen Halbebene  $H := \{(x, y), y > 0\}$ , so ist  $w(Q, 0) = 0$ . Das gleiche Argument zeigt auch: liegen die Punkte alle in einer beliebigen Halbebene (in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ ), so gilt ebenfalls  $w(Q, 0) = 0$ . In diesem Fall, da eine Halbebene konvex ist, sind auch die polygonalen Pfade  $\rho_Q$  (in dieser Halbebene und damit insbesondere in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ !) nullhomotop (Übungsaufgabe 3.10).

Es bleibt der Fall zu betrachten, wo es keine derartige Halbebene gibt. Einer der beiden Punkte  $p_1$  oder  $p_2$  liegt dann in der linken Halbebene (wo  $x < 0$ ). Sagen wir, es ist  $p_1$  (der Fall dass es sich um  $p_2$  handelt geht dann analog). Da  $p_1, p_2 \neq (-1, 0)$  liegt außerdem einer der beiden Punkte in der oberen Halbebene, der andere in der unteren Halbebene. Angenommen der Punkt  $p_1$  liegt in der oberen Halbebene, so dass wir eine Situation wie in folgender Skizze erhalten:





Da  $p_2$  nicht in einer Halbebene mit  $1$  und  $p_1$  liegt, liegt  $p_2$  unterhalb der Geraden durch  $p_1$  und  $-p_1$ . Damit sind die Streckenzüge  $[1, p_1]$ ,  $[p_1, p_2]$  und  $[p_2, 1]$  jeweils homotop zu den Pfaden  $\alpha$ ,  $\beta$  bzw.  $\gamma$  wie in der Skizze angedeutet.

Die Komposition dieser drei Pfade ist homotop zu  $\gamma_1$ . Die Windungszahl des Polygonzugs  $Q$  in diesem Fall ist  $1$ , wie man anhand von (3.57) nachprüft: schreiben wir  $p_0 = p_3 = (1, 0)$ , so gilt  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 1$  sowie  $m_3 = 0$ . In diesem Fall ist die Behauptung also gezeigt.

Andernfalls, falls  $p_1$  in der unteren und  $p_2$  in der oberen Halbebene liegt, ist das Argument gleich, wir erhalten dann eine Homotopie zu  $\gamma_{-1}$ , in Übereinstimmung mit der Windungszahl  $w(Q, 0) = -1$  in diesem Fall.  $\square$

**Folgerung 3.58.** Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(S^1, 1)$  ist abelsch, d.h. es gilt

$$\gamma \circ \gamma' \sim \gamma' \circ \gamma$$

für beliebige Schleifen  $\gamma$  und  $\gamma'$  (mit Aufpunkt  $1$ ). (Dies ist eine Besonderheit von  $S^1$  und gilt für allgemeine topologische Räume nicht, wie wir am Beispiel von  $\mathbf{R}^2 \setminus \{p, q\}$  sehen werden.)

*Beweis.* Da die Abbildung  $w : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbf{Z}$  ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt

$$w(\gamma \circ \gamma') = w(\gamma) + w(\gamma') = w(\gamma') + w(\gamma) = w(\gamma' \circ \gamma).$$

Nach dem Theorem ist  $w$  injektiv, damit folgt die Behauptung.  $\square$

### 3.6 Die Fundamentalgruppe von $S^2$

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist folgende Berechnung:

**Theorem 3.59.** Jede Schleife auf  $S^2$  ist nullhomotop, d.h. homotop zu einer konstanten Schleife. Anders ausgedrückt Die Fundamentalgruppe der 2-Sphäre ist isomorph zur trivialen Gruppe:

$$\pi_1(S^2, (0, 0, 1)) \cong 1.$$

*Beweis.* Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^2$  eine Schleife mit Aufpunkt im Nordpol  $N := (0, 0, 1)$ .

Wir zeigen zunächst einen Teil der Aussage: wir zeigen, dass jede Schleife  $\gamma$  (in  $S^2$ , mit Aufpunkt  $N$ ) mit

$$\text{supp } \gamma \not\subseteq S^2$$

nullhomotop ist, d.h. homotop zur konstanten Schleife  $e_N$  ist, die bei  $N$  verbleibt.

Sei  $p \notin \text{supp } \gamma$ , d.h.  $\gamma$  ist dann eine stetige Abbildung mit Werten in  $S^2 \setminus \{p\}$ . Wir hatten in Übungsaufgabe 2.9 Homöomorphismen

$$S^2 \setminus \{p\} \xrightleftharpoons[\psi]{\phi} \mathbf{R}^2$$

konstruiert; sei  $q := \phi(N)$ . Da  $\mathbf{R}^2$  konvex ist, ist jede Schleife in  $\mathbf{R}^2$  nullhomotop (Übungsaufgabe 3.10), d.h. es gibt eine Homotopie  $H$ , die  $\phi_*(\gamma)$  in die konstante Schleife  $e_q$  (in  $\mathbf{R}^2$ ) bei  $q$  deformiert. Laut Definition und Lemma 3.27 ist  $\psi_*H$  eine Homotopie, die  $\psi_*(\phi_*(\gamma)) = (\psi \circ \phi)_*(\gamma) = \gamma$  in  $\psi_*(e_q)$  deformiert, letzteres ist die konstante Schleife bei  $\psi(q) = N$ .

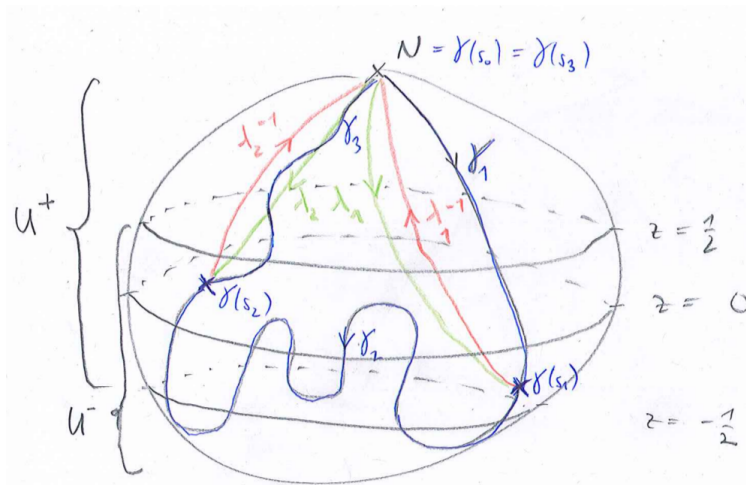
Wir zeigen nun die Aussage im Allgemeinen. (Beachte dass es durchaus stetige *surjektive* Abbildungen  $I \rightarrow S^2$  gibt! Diese kann man z.B. ausgehend von der in Übungsaufgabe 3.13 diskutierten *Hilbert-Kurve* – einer stetigen surjektiven Abbildung  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  konstruieren.) Sei  $U^+ := \{(x, y, z) \in S^2, z > -\frac{1}{2}\}$  und  $U^- := \{(x, y, z) \in S^2, z < \frac{1}{2}\}$ . Beide Teilmengen sind offen in  $S^2$  und es gilt  $S^2 = U^+ \cup U^-$ . Es gibt eine Zerlegung

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$$

mit der Eigenschaft, dass alle Teilpfade  $\gamma|_{[s_k, s_{k+1}]}$  in  $U^+$  oder in  $U^-$  liegen. In der Tat: da  $\gamma$  stetig ist, hat jeder Punkt  $s \in [0, 1]$  eine offene Umgebung  $V_s \ni s$  deren Bild (unter  $\gamma$ ) in einer der beiden offenen Mengen liegt. Wir wählen  $V_s$  so, dass  $V_s$  ein offenes Intervall ist, dessen Abschluss immer noch entweder ganz nach  $U^+$  oder ganz nach  $U^-$  abgebildet wird. Da  $I$  kompakt ist (Theorem 2.14) genügen endlich viele der  $V_s$ , um  $I$  zu überdecken. Die Endpunkte dieser Intervalle erfüllen dann die obigen Anforderungen.

Sei  $\gamma_k := \gamma|_{[s_{k-1}, s_k]}$ . Die  $\gamma_k$  sind Pfade (i.a. keine Schleifen!), deren Bild ganz in  $U^+$  oder ganz in  $U^-$  liegt. Sei  $\lambda_k$  ein Pfad, der auf einem Großkreis vom Nordpol  $N$  nach  $\gamma(s_k)$  verläuft. Es gilt dann (die Homotopien sind in  $S^2$ )

$$\begin{aligned} \gamma &\sim \gamma_n \circ \gamma_{n-1} \circ \dots \circ \gamma_1 \\ &\sim \gamma_n \circ \lambda_{n-1} \circ (\lambda_{n-1})^{-1} \circ \gamma_{n-1} \circ \lambda_{n-2} \circ (\lambda_{n-2})^{-1} \circ \dots \circ (\lambda_1)^{-1} \circ \gamma_1. \end{aligned}$$



(In dieser Skizze wurden  $\lambda_k$  und  $\lambda_k^{-1}$  der besseren Erkennbarkeit wegen nebeneinander gezeichnet, natürlich gilt  $\text{supp } \lambda_k = \text{supp } (\lambda_k^{-1})$ .)

Die Kompositionen  $(\lambda_k)^{-1} \circ \gamma_k \circ \lambda_{k-1}$  (sowie  $\gamma_n \circ \lambda_{n-1}$  und  $\lambda_1^{-1} \circ \gamma_1$ ) sind Schleifen (!) mit Aufpunkt  $N$ , deren Bild nicht ganz  $S^2$  ist, denn auf dem Komplement von  $U^+$  oder  $U^-$  verlaufen diese Schleifen nur auf zwei Großkreisen.

Nach dem ersten Schritt sind all diese Schleifen nullhomotop. Die Komposition nullhomotoper Schleifen ist wiederum nullhomotop (Lemma 3.34, (2)), d.h. wir erhalten unsere Behauptung im allgemeinen Fall.  $\square$

### 3.6.1 Anwendung: Der Satz von Borsuk–Ulam

Wir beweisen nun den eingangs erwähnten *Satz von Borsuk–Ulam* als Folgerung des vorigen Theorems.

**Theorem 3.60.** Sei

$$f : S^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

eine stetige Abbildung. Dann gibt es (mindestens) einen Punkt  $p \in S^2$  mit

$$f(p) = f(-p).$$

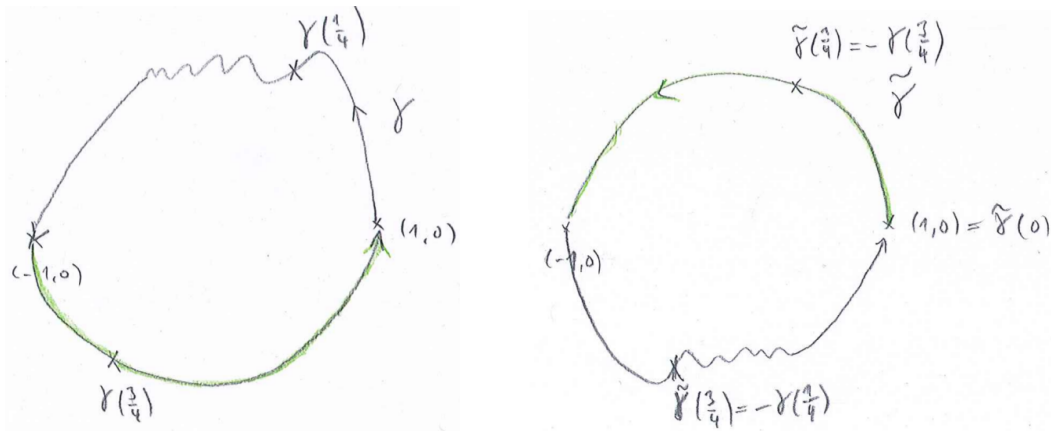
Hierzu ein kleines Vorbereitungslemma:

**Lemma 3.61.** Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  eine Schleife mit Aufpunkt  $\gamma(0) = \gamma(1) = (1, 0)$  und  $\gamma(\frac{1}{2}) = (-1, 0)$ . Definiere

$$\tilde{\gamma}(t) := \begin{cases} -\gamma(t - \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ -\gamma(t + \frac{1}{2}) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dies ist wieder eine Schleife und es gilt

$$w(\gamma, 0) = w(\tilde{\gamma}, 0).$$



*Beweis.* Zunächst ist dies für  $t = \frac{1}{2}$  wohldefiniert. Es ist eine stetige Abbildung (mit Werten in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ ) nach Lemma 3.31. Um die behauptete Gleichung zu zeigen, wählen wir eine genügend feine Approximation von  $\gamma$  durch einen Polygonzug

$$\mathcal{P} = (p_0 = (1, 0), \dots, p_n = (-1, 0) = \gamma(\frac{1}{2}), p_{n+1}, \dots, p_{2n} = (1, 0)).$$

Der Weg  $\tilde{\gamma}$  hat dann eine genügend feine Approximation durch den Polygonzug

$$\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{p}_0 := -p_n = (1, 0), \dots, \tilde{p}_k := -p_{n+k}, \dots, \tilde{p}_n := -p_{2n} = -p_0, \dots, \tilde{p}_{n+k} := -p_k, \dots, \tilde{p}_{2n} := -p_n = (1, 0)).$$

D.h.  $\tilde{p}_k := -p_{n+k}$  für  $0 \leq k \leq n$  sowie  $\tilde{p}_k := -p_{k-n}$  für  $n \leq k \leq 2n$ . Die Behauptung folgt dann aus der Definition der Windungszahl von Polygonzügen sowie

$$\theta(p, q, 0) = \theta(-p, -q, 0).$$

Letztere Gleichheit ist die Übungsaufgabe 3.12. □

*Beweis.* Wir beweisen dies per Widerspruch: angenommen  $f$  hätte nicht diese Eigenschaft. Dann wäre

$$g : S^2 \rightarrow S^1, g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

eine (wohldefinierte und) stetige Abbildung. Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^2, \gamma(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), 0)$  die Schleife, die einmal den Äquator umläuft. Sei schließlich  $\delta := g_*\gamma$  (Definition und Lemma 3.27), d.h.  $\delta(s) = g(\gamma(s))$  das Bild von  $\gamma$  unter der Abbildung  $g$ . Laut Theorem 3.59 ist  $\gamma$  nullhomotop. Damit ist auch  $\delta$  nullhomotop (in  $S^1$ , laut Definition und Lemma 3.27).

Wir zeigen nun, dass andererseits  $w(\delta, 0) \neq 0$  ist. Dies ist dann wegen Theorem 3.24 der gewünschte Widerspruch.

❗ Es gilt  $g(-x) = -g(x)$ , hieraus folgt  $\delta(s + \frac{1}{2}) = -\delta(s)$  für alle  $s \in [0, 1/2]$ . Betrachte die Schleife (!)

$$\rho : t \mapsto \begin{cases} \delta(t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_1(t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

sowie auch die Schleife

$$\tilde{\rho} : t \mapsto \begin{cases} \delta(t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ \gamma_1(t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

(Für die Definition von  $\gamma_1$  siehe Beispiel 3.20, beachte dass auch  $\gamma_1$  die Bedingung  $\gamma_1(s + \frac{1}{2}) = -\gamma_1(s)$  erfüllt.)

Diese Schleifen erfüllen die Bedingung von Lemma 3.61, d.h. es folgt  $w(\rho, 0) = w(\tilde{\rho}, 0)$ . Andererseits ist laut Übungsaufgabe 3.3 aber

$$w(\rho, 0) = w(\delta|_{[0, \frac{1}{2}]}) + w(\gamma_1|_{[\frac{1}{2}, 1]}) = w(\delta|_{[0, \frac{1}{2}]}) + \frac{1}{2}$$

sowie analog  $w(\tilde{\rho}, 0) = w(\delta|_{[0, \frac{1}{2}]}) + \frac{1}{2}$ . Insgesamt ergibt sich

$$w(\delta, 0) = w(\delta|_{[0, \frac{1}{2}]}) + w(\delta|_{[\frac{1}{2}, 1]}) = 2w(\rho, 0) - 1.$$

Dies ist wegen  $w(\rho, 0) \in \mathbf{Z}$  (Lemma 3.13) eine *ungerade* ganze Zahl und damit insbesondere  $\neq 0$ . □

### 3.7 Topologische Invarianz der Dimension

**Theorem 3.62.** (*Topologische Invarianz der Dimension*) Es gibt genau dann einen Homöomorphismus

$$f : \mathbf{R}^i \rightarrow \mathbf{R}^j$$

wenn

$$i = j.$$

(Für  $i = 0$  ist  $\mathbf{R}^0 := \{*\}$  der einelementige Raum gemeint.)

Zur Einordnung dieses Theorems:

- Eine ähnliche Aussage kennen wir aus der linearen Algebra: es gibt genau dann einen **R**-linearen *Isomorphismus*  $\mathbf{R}^i \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^j$  wenn  $i = j$  ist. Diese Aussage ist mit den Grundbegriffen der linearen Algebra recht leicht zu sehen, da es nur “wenige” lineare Abbildungen gibt (z.B. da solche Abbildungen durch Matrizen beschrieben werden können).
- Überraschenderweise gibt es durchaus *stetige und surjektive* Abbildungen

$$\mathbf{R}^i \rightarrow \mathbf{R}^j$$

(auch für  $j > i$ !) In Übungsaufgabe 3.13 wird eine stetige surjektive Abbildung

$$[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$$

konstruiert. Die Idee dieser Konstruktion kann man anpassen für die obige Aussage.

### 3.7.1 Strukturelle Eigenschaften der Fundamentalgruppe

Wie in der Einleitung angedeutet, ist es eine grundlegende Idee der algebraischen Topologie, topologischen Räumen algebraische Daten wie z.B. die Fundamentalgruppe zuzuordnen. Gut nutzbar wird diese Idee, wenn wir auch untersuchen, wie unter diesem Übergang

$$\text{Topologie} \longrightarrow \text{Algebra}$$

stetige Abbildungen sich auf der algebraischen Seite widerspiegeln. Diese Einsichten werden wir anschließend benutzen, um Theorem 3.62 zu beweisen.

**Definition und Lemma 3.63.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Alle Schleifen in  $X$  haben einen fixierten Basispunkt  $x$ .

- (1) Die Abbildung  $\gamma \mapsto f_*(\gamma)$  (vgl. Definition und Lemma 3.27) ist mit der Komposition von Schleifen (Definition und Lemma 3.32) verträglich: es gilt

$$f_*(\gamma \circ \gamma') = f_*(\gamma) \circ f_*(\gamma'). \quad (3.64)$$

Hier ist links mit  $\circ$  die Komposition von Schleifen in  $X$  gemeint, rechts die in  $Y$ .

- (2) Wir erhalten also einen Gruppenhomomorphismus

$$f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x)).$$

*Beweis.* (3.64) prüft man sofort(!) nach: es ist eine direkte Folge der Definition von  $f_*$  und der Komposition von Schleifen. ❗

Zur zweiten Aussage: wir wissen bereits, dass  $\gamma \mapsto f_*(\gamma)$  mit Homotopie verträglich ist (Definition und Lemma 3.27), d.h. zunächst erhalten wir in der Tat eine Abbildung (von Mengen)  $f_*$  wie angegeben. Die Tatsache, dass diese Abbildung ein Gruppenhomomorphismus (im Gegensatz zu einer beliebigen Abbildung zwischen Gruppen) ist, ist dann gerade der Inhalt von (3.64). □

**Satz 3.65.** Für zwei stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  zwischen drei topologischen Räumen und einen Aufpunkt  $x \in X$ ,  $y := f(x)$ ,  $z := g(y)$  betrachte die folgenden beiden Gruppenhomomorphismen:

$$g_* \circ f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Z, z)$$

sowie

$$(g \circ f)_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Z, z).$$

Diese beiden Gruppenhomomorphismen stimmen überein, d.h. es gilt

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*. \quad (3.66)$$

Außerdem gilt für die Identitätsabbildung  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  (die jeden Punkt auf sich selbst abbildet)

$$(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)}.$$

*Beweis.* Auch dieser Beweis ist im Wesentlichen nur "Auspacken der Definitionen". Um (3.66) zu sehen, müssen wir beide Gruppenhomomorphismen auf ein beliebiges Element  $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$  anwenden, d.h.  $\gamma$  ist eine Schleife in  $X$  mit Aufpunkt  $x$ . Dann ist  $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} (g_* \circ f_*)([\gamma]) &= g_*(f_*([\gamma])) \\ &= g_*([f \circ \gamma]) \\ &= [g \circ (f \circ \gamma)] \\ &= [(g \circ f) \circ \gamma] \\ &= (g \circ f)_*([\gamma]). \end{aligned}$$

Die Behauptung mit der Identität prüft man ganz ähnlich nach(!) . □ ❗

**Folgerung 3.67.** Ist  $f : X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus, so ist

$$f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$$

ein Gruppenisomorphismus.

*Beweis.* Ist  $g : Y \rightarrow X$  die (stetige!) Umkehrabbildung von  $f$ , so ist nach Satz 3.65:

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)}.$$

Ebenso ist  $f_* \circ g_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y)}$ . □

### 3.7.2 Beweis der Invarianz der Dimension in niedrigen Dimensionen

Wir führen für den Beweis eine nützliche Sprechweise ein:

**Definition 3.68.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt

- *wegzusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte  $x, y \in X$  einen (stetigen!) Pfad  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  gibt, mit  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ .
- *einfach zusammenhängend*, wenn  $X$  wegzusammenhängend ist und wenn jede Schleife  $\gamma$  in  $X$  nullhomotop ist, d.h. homotop zur Schleife  $e_{\gamma(0)}$  ( $= e_{\gamma(1)}$ ).

Video 19.06.20



**Lemma 3.69.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x, y \in X$ . Es gebe einen Pfad  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  in  $X$  mit Anfangspunkt  $x$  und Endpunkt  $y$ . Dann ist die Abbildung

$$c : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y), [\delta] \mapsto [\gamma \circ \delta \circ \gamma^{-1}]$$

ein Gruppenisomorphismus.

Insbesondere: wenn  $X$  wegzusammenhängend ist, gibt es für beliebige Punkte  $x, y \in X$  einen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y).$$

*Beweis.* Zunächst ist die Abbildung wohldefiniert, d.h. für  $\delta \sim \delta'$  ist laut Lemma 3.34:

$$\gamma \circ \delta \circ \gamma^{-1} \sim \gamma \circ \delta' \circ \gamma^{-1}.$$

Es handelt sich um einen Gruppenhomomorphismus, denn für zwei Schleifen  $\delta$  und  $\delta'$  mit Aufpunkt  $x$  ist laut Übungsaufgabe 3.4

$$\begin{aligned} c(\delta \circ \delta') &= \gamma \circ \delta \circ \delta' \circ \gamma^{-1} \\ &\sim \gamma \circ \delta \circ \gamma^{-1} \circ \gamma \circ \delta' \circ \gamma^{-1} \\ &= c(\delta) \circ c(\delta'). \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(X, x), [\rho] \mapsto [\gamma^{-1} \circ \rho \circ \gamma]$$



ist, wie man sofort nachprüft(!), eine Umkehrabbildung für  $c$ , d.h.  $c$  ist nach Lemma 3.46 ein Gruppenisomorphismus. □

**Bemerkung 3.70.** Das Lemma besagt außerdem: ein Raum  $X$  ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist und  $\pi_1(X, x) \cong 1$  für einen beliebigen Punkt  $x \in X$  ist. Beispielsweise ist also  $S^2$  einfach zusammenhängend (Theorem 3.59) und eine konvexe Teilmenge in  $\mathbf{R}^n$  ebenfalls (Übungsaufgabe 3.10).



*Beweis.* (von Theorem 3.62) *Wir zeigen die Aussage nur in niedrigen Dimensionen, d.h. für den Fall*

$$i, j \leq 3.$$

Angenommen  $f : \mathbf{R}^i \rightarrow \mathbf{R}^j$  wäre ein Homöomorphismus und  $i \neq j$ . Wir leiten hieraus einen Widerspruch her. Setze  $p := f(0) \in \mathbf{R}^j$ . Da  $f$  bijektiv ist, ist die Einschränkung

$$g := f|_{\mathbf{R}^i \setminus \{0\}} : \mathbf{R}^i \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^j \setminus \{p\}$$

ebenfalls ein Homöomorphismus ( $f$  ist stetig und nach Bemerkung 2.33 offen; somit(!) ist auch  $g$  stetig und offen, also ebenfalls ein Homöomorphismus.) ❗

Wir nutzen nun folgende Tatsachen für homöomorphe Räume  $X, Y$ :

- $X \neq \emptyset$  genau dann, wenn  $Y \neq \emptyset$  (da Homöomorphismen insbesondere Bijektionen sind).
- $X$  ist wegzusammenhängend genau dann, wenn  $Y$  wegzusammenhängend ist (Übungsaufgabe 3.21).
- $X$  ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn  $Y$  es ist (Bemerkung 3.70 und Folgerung 3.67)

|                         | $\mathbf{R}^0 \setminus \{p\}$ | $\mathbf{R}^1 \setminus \{p\}$ | $\mathbf{R}^2 \setminus \{p\}$ | $\mathbf{R}^3 \setminus \{p\}$ |
|-------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| nicht-leer              | nein                           | ja                             | ja                             | ja                             |
| wegzusammenhängend      |                                | nein                           | ja                             | ja                             |
| einfach zusammenhängend |                                |                                | nein                           | ja (s.u.)                      |

Wir nutzen hier, dass  $S^2$  einfach zusammenhängend ist sowie die Isomorphismen

$$\begin{aligned} 1 &\cong \pi_1(S^2, (1, 0, 0)) \cong \pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, (1, 0, 0)) \\ \mathbf{Z} &\cong \pi_1(S^1, (1, 0)) \cong \pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}, (1, 0)). \end{aligned}$$

(siehe Übungsaufgabe 3.24; alternativ kann man auch Beispiel 4.6 in Verbindung mit Lemma 4.8 anwenden).

Hieraus ergibt sich ein Widerspruch: für  $i \neq j$  (und beide  $\leq 3$ ) ist eine der Eigenschaften “nicht-leer”, “zusammenhängend”, “einfach zusammenhängend” für  $\mathbf{R}^i \setminus \{p\}$  erfüllt und für  $\mathbf{R}^j \setminus \{p\}$  nicht erfüllt. □

### 3.8 Ein Ausblick in höhere Dimensionen

Die Aussage des Brouwerschen Fixpunktsatzes gilt auch in höheren Dimensionen, d.h. jede stetige Abbildung

$$f : D^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum x_i^2 \leq 1\} \rightarrow D^n$$

hat einen Fixpunkt. Um dies zu zeigen, und auch um Theorem 3.62 in höheren Dimensionen zu zeigen, führt man die sog. *höheren Homotopiegruppen*  $\pi_n(X)$  (für einen topologischen Raum  $X$ ) ein. Die Idee hier ist, “höherdimensionale Löcher” zu entdecken. Man zeigt dann (die Hauptschwierigkeit liegt in dem Isomorphismus rechts)

$$\pi_n(S^{i-1}) \cong \pi_n(\mathbf{R}^i \setminus \{p\}) \cong \begin{cases} 0 & i > n + 1 \\ \mathbf{Z} & i = n + 1 \\ \text{eine schwer zu berechnende Gruppe} & i < n + 1 \end{cases}$$

Insbesondere gilt also

$$\pi_n(S^n) = \mathbf{Z}$$

d.h. “ $S^n$  hat ein (wegen  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^1$ )  $n$ -dimensionales Loch”. Hingegen ist

$$\pi_n(D^n) = 0,$$

d.h.  $D^n$  hat kein  $n$ -dimensionales Loch, da  $D^n$  konvex ist. Hieraus kann man mit der gleichen Methode wie im Beweis von Theorem 3.26 den Satz von Brouwer in höheren Dimensionen zeigen.

Der Beweis von Theorem 3.62 in höheren Dimensionen fußt ebenfalls auf diesen Berechnungen sowie auf der Tatsache (eine Verallgemeinerung von Folgerung 3.67), dass homöomorphe Räume auch isomorphe höhere Homotopiegruppen haben.

Übrigens: die genaue Bestimmung der höheren Homotopiegruppen ist sehr spannend. Es gibt hier etliche bekannte Gesetzmäßigkeiten, aber nach wie vor auch offene Fragen! Überraschend ist auf den ersten Blick, dass die höheren Homotopiegruppen nicht unbedingt trivial sind, z.B.

$$(\pi_3(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}) =) \pi_3(S^2) \cong \mathbf{Z}/2.$$

Sehr lax gesagt: “ $S^2$  hat ein drei-dimensionales Loch, welches verschwindet, wenn man es verdoppelt.” Wer mag, kann auf [https://en.wikipedia.org/wiki/Homotopy\\_groups\\_of\\_spheres](https://en.wikipedia.org/wiki/Homotopy_groups_of_spheres) einen Eindruck von der Komplexität und Reichhaltigkeit der Materie bekommen.

## 3.9 Übungsaufgaben

### 3.9.1 Hausaufgaben

**Übungsaufgabe 3.1.** Zeichne eine Schleife  $\gamma$  mit der Eigenschaft, dass es Punkte in  $\mathbf{R}^2$  gibt, wo die Windungszahl die Werte

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

annimmt.

Beschreibe in Worten Gesetzmäßigkeiten, die dir an der Verteilung der Windungszahlen auffallen. (Im Gegensatz zu sonst ist an dieser Stelle keine Begründung oder Beweis der getroffenen Aussagen gefragt.)

**Übungsaufgabe 3.2.** Seien  $\mathcal{P} = (p_0, \dots, p_n)$  sowie  $\mathcal{Q} = (q_0, \dots, q_m)$  Polygonzüge. Sei  $\mathcal{R} := (p_0, \dots, p_n, q_0, \dots, q_m)$  der Polygonzug, der durch Anhängen von  $\mathcal{Q}$  an  $\mathcal{P}$  entsteht. Wir nehmen außerdem an, dass

$$p_n = q_0.$$

Sei schließlich  $x \in \mathbf{R}^2$  mit  $x \notin \text{supp } \mathcal{P}$  und  $x \notin \text{supp } \mathcal{Q}$ .

- Zeige  $x \notin \text{supp } \mathcal{R}$ . Diskutiere, inwiefern die Voraussetzung  $p_n = q_0$  hier wichtig ist.
- Zeige  $w(\mathcal{R}, x) = w(\mathcal{P}, x) + w(\mathcal{Q}, x)$ .
- Für welchen Polygonzug  $\mathcal{Z}$  gilt  $w(\mathcal{Z}, x) = -w(\mathcal{P}, x)$ ?

**Übungsaufgabe 3.3.** Seien  $\gamma, \gamma' : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  Wege mit der Eigenschaft  $\gamma'(1) = \gamma(0)$ . Zeige

$$w(\gamma \circ \gamma', 0) = w(\gamma, 0) + w(\gamma', 0).$$

**Übungsaufgabe 3.4.** Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  eine Schleife in einem topologischen Raum  $X$  mit Aufpunkt  $x \in X$ . Sei ferner  $\rho : [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg mit Anfangspunkt  $x$  und Endpunkt  $p := \gamma(a)$ , wobei  $a \in [0, 1]$  fixiert ist.

- Gib eine formale Definition einer Schleife

$$\delta : [0, 1] \rightarrow X$$

an, die längs  $\gamma$  von 0 bis  $a$  läuft, dann von  $p = \gamma(a)$  zu  $x$  längs  $\rho^{-1}$ , dann von  $x$  zu  $p$  längs  $\rho$  und dann schließlich von  $\gamma(a)$  zu  $\gamma(1)$  längs  $\gamma$ .

- Konstruiere eine Homotopie (von Schleifen in  $X$  mit Aufpunkt  $x$ )

$$\gamma \sim \delta.$$

**Übungsaufgabe 3.5.** Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  eine Schleife. Sei  $p \in \mathbf{R}^2$  sowie  $v \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ . Betrachte den Strahl

$$L : \mathbf{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto p + tv.$$

Zeige: es gibt ein  $t_0 \in \mathbf{R}^{\geq 0}$  derart, dass für alle  $t > t_0$  gilt:  $L(t) \notin \text{supp } \gamma$  und

$$w(\gamma, L(t)) = 0.$$

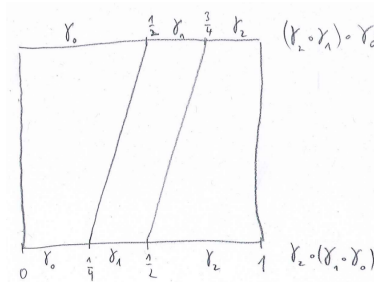
Tipp: zeige zunächst, dass  $\text{supp } \gamma$  beschränkt ist.

**Übungsaufgabe 3.6.** Seien  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  Schleifen in einem topologischen Raum  $X$  mit Aufpunkt  $x \in X$ . Zeige dass es eine Homotopie zwischen den Kompositionen  $(\gamma_2 \circ \gamma_1) \circ \gamma_0$  und  $\gamma_2 \circ (\gamma_1 \circ \gamma_0)$  gibt, d.h. dass

$$(\gamma_2 \circ \gamma_1) \circ \gamma_0 \sim \gamma_2 \circ (\gamma_1 \circ \gamma_0)$$

gilt.

Tipp: überlege zunächst, weshalb die Kompositionen nicht identisch sind. Das folgende Bild kann dir einen Anhaltspunkt geben, wie die Homotopie aussehen kann:



**Übungsaufgabe 3.7.** Sei  $\gamma$  eine Schleife in  $\mathbf{R}^2$ . Zeige:

- Es gibt  $m \in \mathbf{R}$  derart, dass  $\text{supp } \gamma \subset B_m(0)$ .
- Für ein solches  $m$  und  $p \notin B_m(0)$  (insbesondere also auch  $p \notin \text{supp } \gamma$ ) gilt

$$w(\gamma, p) = 0.$$

In Worten: die Windungszahl ist 0 für alle Punkte, die weit genug von der Schleife entfernt liegen.

**Übungsaufgabe 3.8.** Illustriere (per Hand oder mit Hilfe eines geeigneten Computer-Algebra-Systems) den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (Theorem 3.25) am Beispiel eines selbst gewählten Polynoms  $f(x)$ , dessen Grad mindestens 3 ist:

- skizziere, für einige  $R \geq 0$  die Schleifen  $\phi_R : s \mapsto f(R \exp(2\pi i s))$ .
- Zeige, dass für  $R \gg 0$  (wie im Beweis angegeben) die Strecke zwischen  $(Rz)^n$  und  $f(Rz)$  komplett in  $\mathbf{C}^\times$  enthalten ist. Skizziere dieses geometrische Argument. Skizziere auch ein Beispiel das zeigt, dass dies für kleine  $R$  nicht notwendig der Fall sein muss.
- Zeige

$$w(\gamma_n, 0) = w(R\gamma_n, 0).$$

Hierbei ist  $R\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  definiert als  $(R\gamma_n)(t) = R \cdot \gamma_n(t)$ .

**Übungsaufgabe 3.9.** Die folgende Aufgabe illustriert die Bedeutung des zweiten Punktes in der Definition einer Homotopie.

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Seien

$$\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow X$$

zwei Pfade in einem topologischen Raum  $X$  derart, dass  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$  und  $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ . Für die Zwecke dieser Aufgabe nennen wir die Pfade *quasi-homotop*, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$$

gibt, so dass  $H(s, t) = \gamma_t(s)$  für alle  $s \in [a, b]$  und  $t = 0, t = 1$ . (Der Im Vergleich zur Homotopie ist also nicht gefordert, dass  $H(a, t) = \gamma_0(a)$  und  $H(b, t) = \gamma_0(b)$  für alle  $t \in [0, 1]$ .) Zeige, dass *alle* Pfade  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  wie oben angegeben zueinander quasi-homotop sind (und damit der Begriff der Quasi-Homotopie keine sinnvolle Unterscheidung von Pfaden ermöglicht).

**Übungsaufgabe 3.10.** Eine Teilmenge  $X \subset \mathbf{R}^n$  heißt *konvex*, wenn für alle Punkte  $x, y \in X$  auch die Strecke, die  $x$  und  $y$  verbindet, ganz in  $X$  enthalten ist. D.h. für alle  $t \in [0, 1]$  muss  $tx + (1 - t)y$  in  $X$  sein.

- Skizziere einige konvexe und einige nicht konvexe Teilmengen in  $\mathbf{R}^2$ .
- Zeige, dass zwei beliebige Pfade (mit gleichen Anfangs- und Endpunkten) in  $X$  dann homotop sind.
- Gib eine nicht konvexe Teilmenge des  $\mathbf{R}^2$  an, in der alle Pfade homotop sind (eine graphische Beweisidee genügt für diesen Punkt).

**Übungsaufgabe 3.11.** Sei  $p := (0, 0)$  und  $q := (1, 0)$ . Gib eine explizite Formel (in Termen von aus der Schule bekannten Winkelfunktionen) für

$$\theta(p, q, x)$$

an.

Skizziere den Graphen dieser Funktion (per Hand oder mittels eines geeigneten Computeralgebrasystems). Zeige (unter Verwendung bekannter Tatsachen aus der Analysis) dass die Abbildung

$$\mathbf{R}^2 \setminus [p, q] \rightarrow (-\pi, \pi), x \mapsto \theta(p, q, x).$$

stetig ist. Kommentiere das Verhalten von  $\theta$  um die Strecke  $[(0, 0), (1, 0)]$ .

**Übungsaufgabe 3.12.** Seien  $p, q \in \mathbf{R}^2$  mit der Eigenschaft dass  $0 \notin [p, q]$ . Zeige

$$\theta(p, q, 0) = \theta(-p, -q, 0).$$

**Übungsaufgabe 3.13.** Sei  $I := [0, 1]$ . In dieser Aufgabe wird die *Hilbert-Kurve* konstruiert, eine *stetige und surjektive* Abbildung

$$H : I \rightarrow I \times I.$$

(1) Betrachte die Abbildungen

$$H_0, H_1, H_2, H_3 : I^2 \rightarrow I^2,$$

definiert durch

$$\begin{aligned} H_0\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &:= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ H_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ H_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ H_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &:= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zeige, dass für diese Abbildungen gilt:

$$|H_i(x) - H_i(y)| < \frac{1}{2}|x - y|. \quad (3.71)$$

Folgere, dass die Abbildungen stetig sind. (Eine Abbildung mit der obigen Eigenschaft heißt *Lipschitz-stetig*.)

- (2) Sei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl. Zeige, dass es für jede reelle Zahl  $t \in I$  eine eindeutige Folge von natürlichen Zahlen

$$a_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

gibt so dass

- $t = \sum_{k=1}^{\infty} a_k n^{-k}$
- es gibt kein  $K \in \mathbf{N}$  derart, dass für alle  $k > K$  gilt  $a_k = n-1$ .

Wir bezeichnen die so definierte eindeutige Zahlenfolge mit  $a_k(t)$ .

- (3) Wir wenden den vorigen Teil der Aufgabe mit  $n = 4$  an. Sei  $t \in I$ . Bezeichne

$$H_k(t) := H_{a_k(t)} \circ H_{a_{k-1}(t)} \circ \dots \circ H_{a_1(t)}(0)$$

Skizziere den Graphen von  $H_1$  und  $H_2$ .

- (4) Zeige dass der Grenzwert

$$H(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} H_k(t)$$

existiert. Berechne  $H(\frac{1}{4})$  und  $H(\frac{1}{8})$ .

- (5) Zeige dass die so definierte Funktion

$$H : I \rightarrow I^2$$

stetig und surjektiv ist.

Tipp: um zu zeigen, dass  $(x, y) \in I^2$  im Bild von  $H$  liegt, betrachte die binäre Darstellung von  $x$  und  $y$  (d.h. den Fall  $n = 2$  in (2)). Für die Surjektivität nutze (3.71).

**Übungsaufgabe 3.14.** Beende den Beweis von Lemma 3.34. Es genügt, einen graphischen Beweis anzugeben; auf eine formelhafte Beschreibung der Homotopien darf verzichtet werden.

**Übungsaufgabe 3.15.** Wir betrachten  $S^1 := \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$  mit der üblichen Topologie und versehen es mit der Multiplikation als Gruppenstruktur.

- Zeige, dass die Multiplikation und die Inversenabbildung  $z \mapsto z^{-1}$  stetige Abbildungen sind.
- Zeige, dass der einzige stetige Gruppenhomomorphismus

$$f : (S^1, \cdot) \rightarrow (\mathbf{R}, +)$$

die Abbildung ist, die jedes  $z \in S^1$  auf 0 abbildet.

Tipp: zeige dass das Bild  $Z := f(S^1)$  beschränkt ist und für  $x, y \in Z$  auch  $x + y \in Z$  gilt. Folgere  $Z = \{0\}$ .

**Übungsaufgabe 3.16.** Zeige folgende Aussagen durch geeignetes Anwenden der Gruppenaxiome. Sei  $g \in G$  ein beliebiges Element einer Gruppe.

- Wenn sowohl  $e$  als auch  $f \in G$  neutrale Elemente in  $G$  sind, so gilt  $e = f$ .
- Wenn sowohl  $h$  als auch  $i$  inverse Elemente von  $g$  sind, so gilt  $h = i$ .

In Worten: obwohl in der Definition nur die Existenz eines neutralen Elementes und Existenz von Inversen gefordert wird, sind diese (als allgemeine Folgerung der Axiome) stets eindeutig.

**Übungsaufgabe 3.17.** Welche der Gruppenhomomorphismen in Beispiel 3.48 sind Isomorphismen? Gib für die Isomorphismen jeweils den inversen Gruppenhomomorphismus an. Diskutiere für die Abbildungen, die keine Isomorphismen sind, wie man sie (möglichst "schonend") zu Gruppenisomorphismen abwandelt.

**Übungsaufgabe 3.18.** Sei  $f : (\mathbf{R}, +) \rightarrow (\mathbf{R}^\times, \cdot)$  ein Gruppenhomomorphismus der überdies stetig ist. Sei  $a := f(1) \in \mathbf{R}^\times$ . Zeige, dass

$$a > 0$$

und zeige dass dann gilt

$$f(x) = a^x (:= \exp(\log a \cdot x)).$$

Tipp: was ist  $f(2) = f(1 + 1)$ ,  $f(-1)$ ? Was ist  $f(\frac{a}{b})$  für  $a, b \in \mathbf{N}$ ? Folgere insbesondere  $f(1) > 0$  aus der Betrachtung von  $f(\frac{1}{2})$ . Nutze die Stetigkeit von  $f$  um zu zeigen, dass die Werte von  $f$  an irrationalen Zahlen durch die Werte an den rationalen Zahlen bestimmt sind.

**Übungsaufgabe 3.19.** Zeige, dass es keinen Homöomorphismus

$$f : S^1 \rightarrow [a, b]$$

gibt.

**Übungsaufgabe 3.20.** Eine Teilmenge  $A \subset \mathbf{R}^n$  heißt *sternförmig*, falls es einen Punkt  $a \in A$  gibt mit der Eigenschaft, dass für jeden Punkt  $b \in A$  auch die Strecke

$$[a, b] := \{ta + (1 - t)b, t \in [0, 1]\}$$

in  $A$  enthalten ist.

(1) Skizziere je eine sternförmige und eine nicht sternförmige Teilmenge in  $\mathbf{R}^2$ .

(2) Sei  $A$  sternförmig und  $a \in A$  wie oben in der Definition. Zeige  $\pi_1(A, a) \cong 1$ .

(3) Sei  $b \in A$  beliebig. Zeige  $\pi_1(A, b) \cong 1$ .

**Übungsaufgabe 3.21.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus. Zeige:  $X$  ist wegzusammenhängend genau dann, wenn  $Y$  es ist.

Tipp: die Beweisstrategie ähnelt teilweise der von Lemma 3.34.

**Übungsaufgabe 3.22.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Entscheide (mit Begründung), ob  $f$  notwendigerweise einen Fixpunkt hat:

- Für  $X = \mathbf{R}$ ?
- Für  $X = [0, 1]$ ?
- Für  $X = S^1$ ?
- Für  $X = [0, 1] \times [0, 1]$ ? Tipp hierzu: zu welchem (für die Aufgabe geeigneten) Teilraum von  $\mathbf{R}^2$  ist  $X$  homöomorph?

**Übungsaufgabe 3.23.** Sei  $X \subset \mathbf{R}$  ein offenes oder abgeschlossenes Intervall. Zeige: es gibt genau dann einen Homöomorphismus

$$X^i \rightarrow X^j,$$

wenn  $i = j$  ist.

Wiederhole hierzu den Beweis von Theorem 3.62. Erkläre, welche Beweisschritte gleich bleiben, und an welchen Stellen man ein (etwas) anderes Argument benötigt.

**Übungsaufgabe 3.24.** Betrachte die kanonische Inklusion

$$\iota : S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

sowie die Abbildung

$$r : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n, x \mapsto \frac{x}{|x|}.$$

Zeige, dass die beiden Gruppenhomomorphismen

$$\iota_* : \pi_1(S^n, (0, \dots, 0, 1)) \rightarrow \pi_1(\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}, (0, \dots, 0, 1))$$

und

$$r_* : \pi_1(\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}, (0, \dots, 0, 1)) \rightarrow \pi_1(S^n, (0, \dots, 0, 1))$$

zueinander inverse Gruppenhomomorphismen sind.

Tipp: orientiere dich für die Komposition  $\iota_* \circ r_*$  am Beweis von Lemma 3.52.

**Übungsaufgabe 3.25.** Sei  $G$  eine Gruppe. Zeige, ausschließlich unter Benutzung der Gruppenaxiome, folgende Behauptungen:

- $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ .
- Für fixiertes  $x \in G$  ist die folgende Abbildung (die sog. *Konjugation* mit  $x$ ) ein Gruppenhomomorphismus:

$$c_x : G \rightarrow G, g \mapsto xgx^{-1}.$$

- $G$  ist genau dann abelsch, wenn für alle  $x \in G$  gilt:  $c_x = \text{id}_G$ .

**Übungsaufgabe 3.26.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (1) Jede stetige Abbildung  $f : S^1 \rightarrow X$  lässt sich zu einer stetigen Abbildung  $g : D^2 \rightarrow X$  ausdehnen (d.h. es gibt eine solche Abbildung  $g$  und  $g|_{S^1} = f$ ).
- (2) Für jeden Punkt  $x \in X$  ist die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x)$  isomorph zur trivialen Gruppe.

Tipp: für die Richtung i)⇒ii) betrachte zunächst den Fall, dass die Abbildung  $[0, 1] \rightarrow X, t \mapsto g(t, 0)$  konstant ist.

**Übungsaufgabe 3.27.** Gilt der Satz von Borsuk–Ulam auch für  $S^1 \times S^1$ ? D.h. gibt es für jede stetige Funktion

$$f : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

einen Punkt  $(x, y) \in S^1 \times S^1$  mit

$$f(x, y) = f(-x, -y)?$$

### 3.9.2 Präsenzaufgaben für die Übungen

**Übungsaufgabe 3.28.** Gib eine stetige, jedoch nicht gleichmäßig stetige Funktion

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

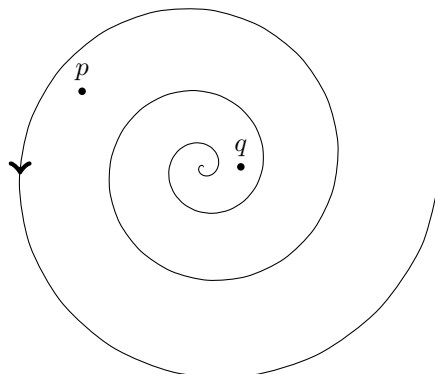
an.

**Übungsaufgabe 3.29.** Skizziere den Polygonzug  $\mathcal{P} = ((2, 0), (2, 2), (3, 1), (0, 2))$  und finde ein  $p \in \mathbf{R}^2$ , sodass  $\text{supp}(\mathcal{P}) \subset B_{|p|}(p)$  gilt. Bestimme  $w(\mathcal{P}, 0)$ .

Schließe nun den Polygonzug, d.h. betrachte den Polygonzug  $\mathcal{P}' = ((2, 0), (2, 2), (3, 1), (0, 2), (2, 0))$ . Bestimme  $w(\mathcal{P}', 0)$ .

Vergleiche deine Ergebnisse mit Lemma 3.14.

**Übungsaufgabe 3.30.** Betrachte den Pfad  $\gamma$  mit folgendem Bild:

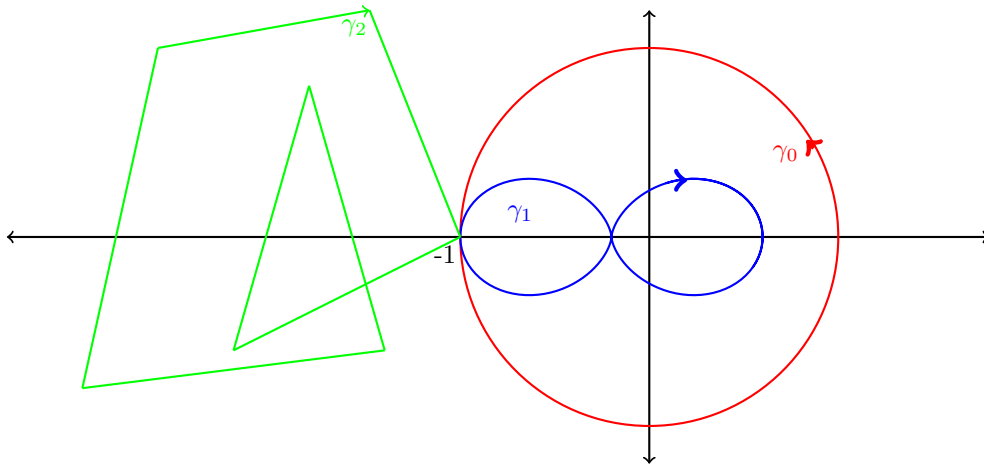


Bestimme für  $p$  und  $q$  zwei Zahlen  $m, n \in \mathbf{Z}$  mit  $m \leq w(\gamma, p) \leq m + 1$  und  $n \leq w(\gamma, q) \leq n + 1$ . Mit anderen Worten: Schätze die Windungszahl des Pfades  $\gamma$  um die Punkte  $p$  und  $q$  ab, indem du ganze Zahlen als obere und untere Schranke angibst. Wie lauten die Schranken  $m$  und  $n$ , wenn die Pfeilrichtung sich umkehrt?

**Übungsaufgabe 3.31.** Es sei  $f: D^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  eine stetige Abbildung mit  $\langle x, f(x) \rangle \geq 0$  für alle  $x \in S^1$ . Zeige: Es existiert ein  $p \in D$  mit  $f(p) = 0$ .

Tipp: Führe einen Widerspruchsbeweis, indem du die Hilfsfunktion  $g(x) = -\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$  betrachtest, einen Fixpunkt  $p$  von  $g$  findest, und  $\|p\|$  abschätzt.

**Übungsaufgabe 3.32.** Entscheide, welche der Schleifen  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  in  $\mathbf{R}^2$  bzw. in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  homotop sind.



**Übungsaufgabe 3.33.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\gamma$  eine Schleife mit Basispunkt  $x \in X$ . Zeige  $\gamma^{-1} \circ \gamma \sim e_x$  sowie  $e_x \circ \gamma \sim \gamma$ .

Bemerkung: Analog ist  $\gamma \circ \gamma^{-1} \sim e_x$  sowie  $\gamma \circ e_x \sim \gamma$ .

**Übungsaufgabe 3.34.** Entscheide, ob die folgenden Mengen  $G$  mit Verknüpfung  $\circ: G \times G \rightarrow G$  (abelsche) Gruppen bilden:

- $(\mathbf{N}, +)$  und  $(\mathbf{N}, \cdot)$ ,
- $(\mathbf{Z}, +)$  und  $(\mathbf{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,
- $(\text{Mat}_{n \times n}(k), \cdot)$  und  $(\text{GL}_n(k) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(k) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot)$  für einen Körper  $k$  und  $n \geq 1$ .  
Achtung: Unterscheide die Fälle  $n = 1$  und  $n \geq 2$ .

**Übungsaufgabe 3.35.** • Zeige, dass

$$\varphi: (\mathbf{R}, +) \rightarrow (\text{GL}_2(\mathbf{R}), \cdot), \quad x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

- Nun sei  $f: (G, \circ) \rightarrow (H, \star)$  ein beliebiger Gruppenhomomorphismus und  $n \in \mathbf{Z}$ .  
Zeige:  $f(g^n) = f(g)^n$ .
- Es sei  $x \in \mathbf{R}$ . Wie operiert  $\varphi(x)$  auf dem  $\mathbf{R}^2$  (d.h. beschreibe die Abbildung  $d_x: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, y \mapsto \varphi(x) \cdot y$ )? Bestimme  $\varphi(x)^n$  für  $n \in \mathbf{Z}$ .

**Übungsaufgabe 3.36.** Zeige: Ein Gruppenhomomorphismus  $f: G \rightarrow H$  ist genau dann injektiv, wenn  $\ker(f) := \{g \in G \mid f(g) = e_H\} = \{e_G\}$  ist.



**Übungsaufgabe 3.37.** Betrachte die Gruppe  $GL_2(\mathbf{R}) = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R}) \mid A \text{ ist invertierbar}\}$ .

- Zeige, dass  $GL_2(\mathbf{R})$  eine offene Teilmenge von  $M_{2 \times 2}(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^4$  ist.  
Tipp: Nutze die Determinante.
- Zeige, dass  $GL_2(\mathbf{R})$  eine topologische Gruppe ist, d.h. die Multiplikation und Inversenbildung sind stetig.



# Kapitel 4

## Der Satz von van Kampen

Der Satz von van Kampen ist ein wichtiges Werkzeug, um Fundamentalgruppen komplizierter(er) Räume  $X$  zu berechnen, indem man  $X$  in kleinere Teile zerlegt und deren Fundamentalgruppen bestimmt. Wir werden diesen Satz beispielsweise benutzen, um folgendes zu zeigen:

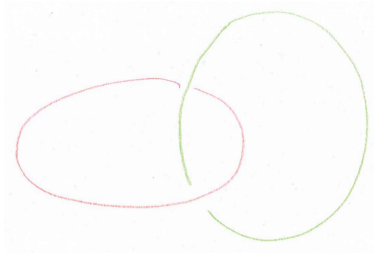
**Beispiel 4.1.** Dass Komplement

$$\mathbf{R}^3 \setminus K$$

zweier verknotteter Ringe (siehe Skizze) ist *nicht* homöomorph zu

$$\mathbf{R}^3 \setminus F,$$

dem Komplement zweier nicht verknotteter Ringe



### 4.1 Verknottete und nicht verknottete Ringe – Überblick

In diesem Abschnitt geben wir einen Überblick über die wichtigsten, welche zum Verständnis von Beispiel 4.1 führen.

**Satz 4.2.** Sei

$$F := (S^1 \times \{-1\}) \sqcup (S^1 \times \{1\}),$$

die disjunkte Vereinigung zweier nicht verknotteter Kopien von  $S^1$ . Es gibt dann einen Gruppenisomorphismus

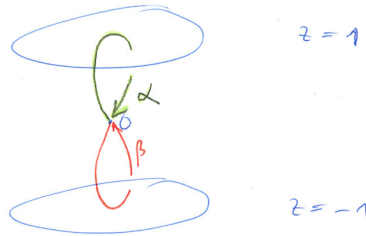
$$\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus F, 0) \cong F_2,$$

wobei  $F_2$  die sog. *freie Gruppe* mit 2 Erzeugern ist.

Freie Gruppen werden wir in Kürze definieren (Definition und Lemma 4.19). An dieser Stelle sei nur bemerkt, dass die Aussage insbesondere bedeutet, dass es in  $\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus F, 0)$  zwei Elemente  $\alpha$  und  $\beta$  gibt, die nicht miteinander kommutieren, d.h. so dass

$$\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha.$$

Jedes Element in der Fundamentalgruppe ist eine Komposition der vier Schleifen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha^{-1}$  und  $\beta^{-1}$ . (Man sagt,  $\alpha$  und  $\beta$  erzeugen die Fundamentalgruppe.) Zwischen diesen Schleifen bestehen ansonsten keine Relationen (was dies genau bedeutet, werden wir noch sehen). Geometrisch können wir diese Elemente als die folgenden Schleifen ansehen:



Diese freie Gruppe treffen wir auch noch in einer anderen Situation an:

**Satz 4.3.** Es gibt einen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{(+1, 0), (-1, 0)\}, 0) \cong F_2.$$

Wiederum bedeutet dies, dass es zwei Schleifen gibt, die die Fundamentalgruppe erzeugen und keine Relationen zwischen diesen Erzeugern bestehen.

Man kann mittels Theorem 3.62 zeigen, dass  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(+1, 0), (-1, 0)\}$  nicht homöomorph zu  $\mathbf{R}^3 \setminus F$  ist. Dennoch besagen die vorigen Sätze, dass ihre Homotopiegruppen isomorph sind. Der Schlüssel zum Vergleich beider topologischer Räume ist eine Abschwächung des Begriffs der Homöomorphie:

**Definition 4.4.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  eine Teilmenge (die wir mit der Teilraumtopologie versehen). Ein *Deformationsretrakt* von  $X$  nach  $A$  ist eine Abbildung

$$f : X \times [0, 1] \rightarrow X$$

mit folgenden Eigenschaften:

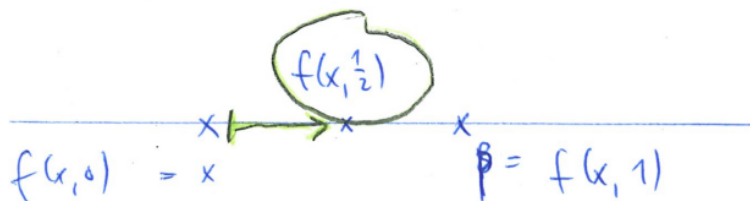
- (1)  $f$  ist stetig,
- (2)  $f(x, 0) = x$  für alle  $x \in X$ ,
- (3)  $f(x, 1) \in A$  für alle  $x \in X$ , und
- (4)  $f(x, t) = x$  für alle  $x \in A$ .

**Beispiel 4.5.** Die Inklusion

$$\{p\} \subset \mathbf{R}^n$$

ist ein Deformationsretrakt, vermöge

$$f(x, t) := (1 - t)(x - p) + p.$$



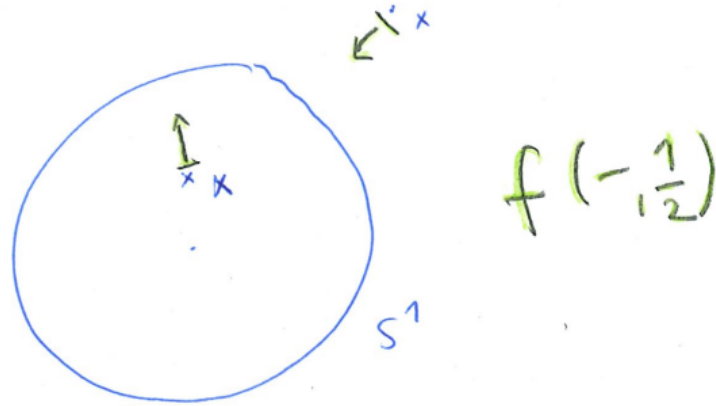
**Beispiel 4.6.** Die Inklusion

$$S^1 \subset \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$$

ist ein Deformationsretrakt, vermöge

$$f(x, t) = x \frac{r_1(|x|, t)}{|x|},$$

wobei  $r_1 : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  den Deformationsretrakt der Inklusion  $\{1\} \subset \mathbf{R}$  aus dem vorigen Beispiel bezeichnet.



Allgemeiner ist  $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  ein Deformationsretrakt, vergleiche dies auch mit Übungsaufgabe 3.24.

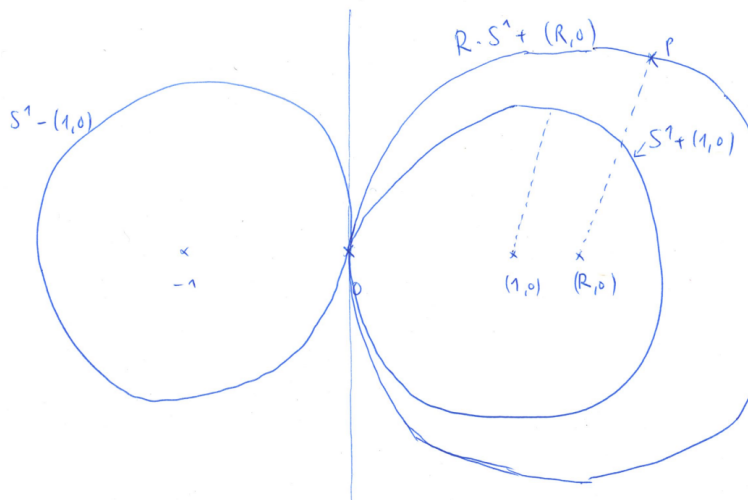
**Beispiel 4.7.** Bezeichne (die Notation ist etwas verkürzt, da sie die Lage der beiden  $S^1$ -en nicht genau spezifiziert)

$$S^1 \vee S^1 := (S^1 + (1, 0)) \cup (S^1 - (1, 0))$$

die Vereinigung zweier Kopien von  $S^1$ , derart verschoben, dass sie sich in genau einem Punkt berühren. Die Inklusion

$$A := S^1 \vee S^1 \subset X := \mathbf{R}^2 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$$

ist ein Deformationsretrakt.



In der Tat, jeder Punkt  $p$  in der rechten Halbebene  $H^+ := \{(x, y), x > 0\}$  liegt auf genau einem Kreis der Form

$$B_R((+R, 0)),$$

mit  $R > 0$ . Schreibe dann

$$p = (R^+(p), 0) + R^+(p) \cdot a^+(p),$$

mit  $R^+(p) \in \mathbf{R}^{>0}$ ,  $a^+(p) \in S^1$ . Ebenso schreibt sich jeder Punkt in der linken Halbebene als

$$p = (-R^-(p), 0) + R^-(p) \cdot a^-(p).$$

Die Abbildungen  $R^\pm, a^\pm$  sind dann stetige Abbildungen auf diesen Halbebenen. Verwende die Retraktion  $r_1 : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  der Inklusion  $\{1\} \subset \mathbf{R}$  sowie die Retraktion  $r_0$  der Inklusion  $\{0\} \subset \mathbf{R}$ .

Dann erfüllt die Abbildung

$$f : X \times [0, 1] \rightarrow X, (p, t) \mapsto \begin{cases} (r_1(R^+(p), t), 0) + r_1(R^+(p), t)a^+(p) & p \in H^+ \\ (-r_1(R^-(p), t), 0) + r_1(R^-(p), t)a^-(p) & p \in H^- \\ (0, r_0(y, t)) & p = (0, y) \end{cases}$$

! alle Bedingungen von Definition 4.4, wie man anhand der Definition nachprüft(!) .

Die Relevanz des Begriffs “Deformationsretrakt” liegt in der Tatsache, dass hiermit die Fundamentalgruppen geeigneter Räume leicht miteinander verglichen werden können:

Video 23.06.20



**Lemma 4.8.** Sei  $A \subset X$  ein Deformationsretrakt sowie  $x \in A$ . Dann ist die induzierte Abbildung

$$\pi_1(A, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$$

(die jede Schleife in  $A$  auf die gleiche Schleife, nun jedoch aufgefasst als Schleife in  $X$ , abbildet) ein Gruppenisomorphismus.

*Beweis.* Sei  $f : X \times [0, 1] \rightarrow X$  eine Retraktion wie in Definition 4.4. Bezeichne mit  $i : A \rightarrow X$  die Inklusion sowie  $r := f_1$ . Laut Definition und Lemma 3.63 ist  $i_*$  ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist  $r \circ i = \text{id}_A$  (Punkt (4) in der Definition). Hieraus folgt  $r_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(A, x)}$  (Satz 3.65). Insbesondere ist  $i_* : \pi_1(A, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  injektiv. Zur Surjektivität von  $i_*$ : sei  $\gamma$  eine Schleife in  $X$  (mit Aufpunkt  $x$ ). Dann ist

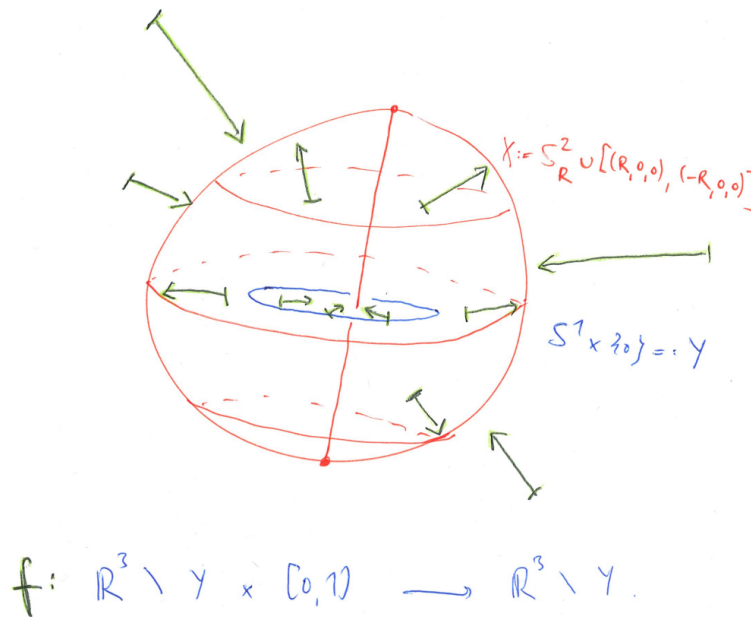
$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, (s, t) \mapsto f(\gamma(s), t)$$

eine Homotopie zwischen  $\gamma = H(s, 0)$  und der Schleife  $s \mapsto \delta(s) := H(s, 1)$ . (Beachte  $H(0, t) = f(\gamma(0), t) = f(x, t) = x$  für alle  $t$ , nach Definition eines Deformationsretrakts. Ebenso für  $H(1, t)$ .) Die Schleife  $\delta$  ist nach Definition 4.4 eine Schleife in  $A$ . Damit ist  $\gamma \sim \delta$  und  $i_*$  ist surjektiv. Laut Lemma 3.46 ist  $i_*$  also ein Gruppenisomorphismus.  $\square$

**Beispiel 4.9.** Die Inklusion

$$\tilde{S}^2 := S_R^2 \cup [(0, 0, R), (0, 0, -R)] \subset \mathbf{R}^3 \setminus (S^1 \times \{0\})$$

ist ein Deformationsretrakt. Hierbei bezeichnet  $S_R^2$  die 2-Sphäre mit Radius  $R > 1$ . Dies ist in der folgenden Skizze angedeutet, die Pfeile deuten die Retraktion an: die Punkte außerhalb der  $S^2$  werden auf die  $S^2$  retrahiert, die Punkte innerhalb der  $S^2$  werden auf die Strecke  $[(0, 0, R), (0, 0, -R)]$  bzw. auf die  $S^2$  retrahiert (d.h. weg von der innen liegenden  $S^1 \times \{0\}$ ).



**Beispiel 4.10.** Analog sei  $F := (S^1 \times \{-1\}) \sqcup (S^1 \times \{1\})$  die (disjunkte) Vereinigung zweier unverknoteter Kreise. Sei außerdem  $X := \tilde{S}^2 \vee \tilde{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  die Vereinigung zweier Räume der Form  $\tilde{S}^2$  (aus dem vorigen Beispiel), mit einem gemeinsamen Punkt.

Wiederum ist die Inklusion

$$X \subset \mathbb{R}^3 \setminus F$$

ein Deformationsretrakt.

**Notation 4.11.** Wenn wir im folgenden Fundamentalgruppen für topologische Räume  $X$  angeben, werden diese Räume stets wegzusammenhängend sein. Insbesondere liefert dies für zwei beliebige Punkte  $x, y \in X$  Isomorphismen:

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$$

(Lemma 3.69; dieser Isomorphismus hängt von der Wahl eines Weges von  $x$  nach  $y$  ab). Wenn wir eine Aussage der Form “ $\pi_1(X)$  ist isomorph zu einer Gruppe  $G$ ” treffen, ist hiermit gemeint: für einen Punkt  $x$  (äquivalent: für jeden Punkt  $x$ ) gibt es einen Gruppenisomorphismus  $\pi_1(X, x) \cong G$ .

**Folgerung 4.12.** Wir erhalten folgende Gruppenisomorphismen

$$\begin{aligned} \pi_1(\tilde{S}^2 \vee \tilde{S}^2) &\cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus F) \\ \pi_1(S^1 \vee S^1) &\cong \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(+1, 0), (-1, 0)\}). \end{aligned}$$

Die Strategie, die Fundamentalgruppen dieser Räume zu berechnen (und zu sehen, dass es sich um isomorphe Gruppen handelt), lässt sich wie folgt umreißen:

- Der Raum  $\tilde{S}^2$  lässt sich deuten als eine  $S^2$ , zusammen mit einer  $S^1$ , die längs eines abgeschlossenen Intervalls “zusammengeklebt” sind. Da  $S^2$  und auch das abgeschlossene Intervall einfach zusammenhängend sind (Bemerkung 3.70, insbesondere ist ihre  $\pi_1$  trivial) und  $\pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$  wird sich, wie wir als Beispiel des Satzes von van Kampen sehen werden, hieraus

$$\pi_1(\tilde{S}^2) \cong \pi_1(S^1) \stackrel{\text{Theorem 3.50}}{\cong} \mathbf{Z}$$

ergeben.

- Außerdem, wie wir ebenfalls aus dem Satz von van Kampen ableiten werden, gilt

$$\pi_1(\tilde{S}^2 \vee \tilde{S}^2) \cong \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z} * \mathbf{Z} =: F_2.$$

Hierbei bezeichnet  $*$  das freie Produkt, welches wir in Kürze einführen werden. Die Gruppe rechts ist die sog. freie Gruppe in zwei Erzeugern.

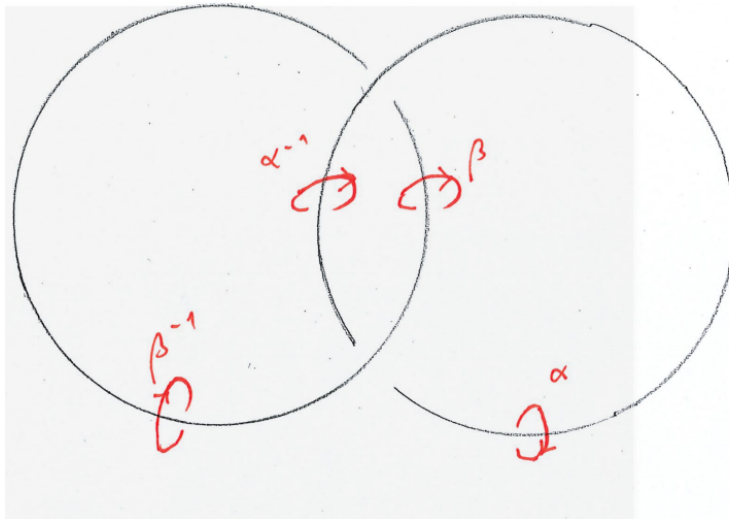
Betrachten wir hingegen das Komplement zweier verknotteter Ringe  $K$  (siehe Skizze in Beispiel 4.1), so werden wir erhalten:

$$\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus K) \cong \mathbf{Z}^2.$$

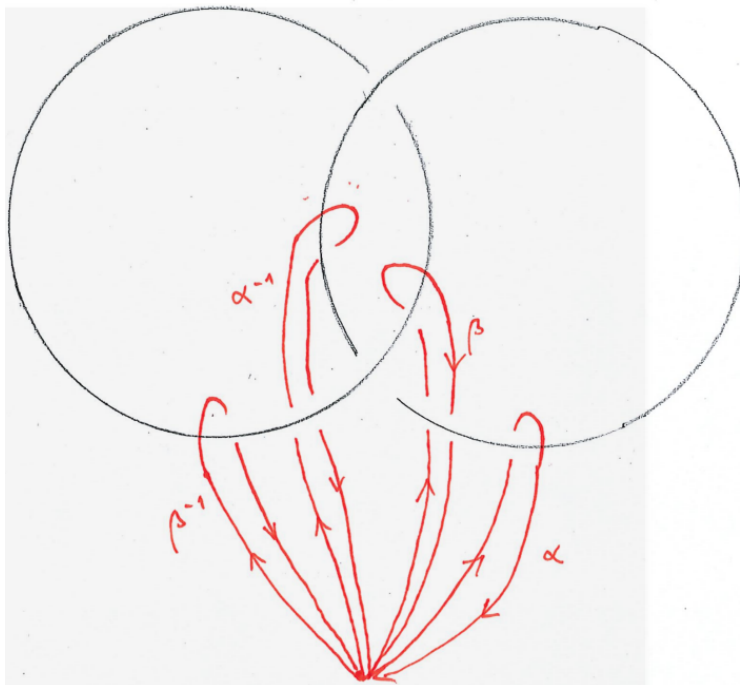
Auch dies wird ein Resultat des Satzes von van Kampen sein. Im Moment können wir schon einmal feststellen, dass es eine interessante Relation zwischen den Schleifen  $\alpha$  und  $\beta$  gibt, nämlich

$$\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} = e,$$

d.h.  $\alpha$  und  $\beta$  kommutieren (in  $\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus K)$  miteinander! Dies sieht man an folgender Skizze. In der ersten wurde der Aufpunkt der Klarheit halber nicht für alle Schleifen gleich gezeichnet.

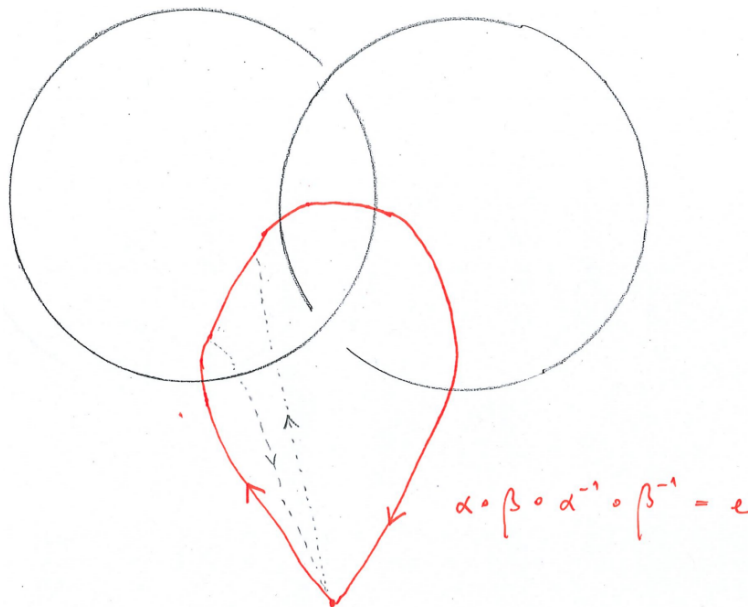


Um die Schleifen komponieren zu können, zeichnen wir sie erneut, mit gleichem Aufpunkt:



Die Komposition der Schleifen ist bis auf Homotopie (gestrichelt angedeutet) gerade die Nullschleife (beachte dass die rot gezeichnete Schleife über beiden Ringen liegt, damit ist sie nullhomotop)





Wir fassen zusammen:

| Ring $S$                    | $\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus S)$ | abelsch |
|-----------------------------|-----------------------------------|---------|
| Nicht verknottete Ringe $F$ | $F_2$                             | nein    |
| Verknottete Ringe $K$       | $\mathbf{Z}^2$                    | ja      |

Laut Folgerung 3.67 sind also  $\mathbf{R}^3 \setminus K$  und  $\mathbf{R}^3 \setminus F$  nicht zueinander homöomorph.

## 4.2 Freie Produkte von Gruppen

Freie Gruppen und allgemeiner freie Produkte von Gruppen sind eine ungemein wichtige Konstruktionstechnik, um neue Gruppen aus schon bekannten zu konstruieren.

Die Idee ist folgende: seien  $G$  und  $H$  zwei Gruppen (die nichts miteinander zu tun haben). Wir suchen eine neue Gruppe, in der sowohl die Elemente von  $G$ , als auch die von  $H$  drin liegen, aber ansonsten möglichst nichts miteinander zu tun haben! Wie könnte man so eine Gruppe konstruieren? Eine Idee ist die folgende:

**Definition und Lemma 4.13.** Seien  $G, H$  Gruppen. Das *Produkt* (oder auch *direkte Produkt*)

$$G \times H = \{(g, h) | g \in G, h \in H\}$$

versehen wir mit der komponentenweisen Gruppenoperation, d.h.

$$(g, h) \circ (g', h') := (g \circ_G g', h \circ_H h').$$

Hierbei bedeutet  $\circ_G$  die Operation in  $G$  usw. Dies ist eine Gruppe.

*Beweis.* Der Beweis ist ein einfaches Nachprüfen der Gruppenaxiome und bleibt dir überlassen(!) . Wir bemerken nur, dass Inverse durch

$$(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$$

und

$$e = (e_G, e_H)$$

gegeben sind. □

Das Produkt  $G \times H$  ist eine wichtige Konstruktion, ist aber nicht die Lösung für das o.g. Problem: wir haben zwar einen injektiven Gruppenhomomorphismus(!)

$$G \rightarrow G \times H, g \mapsto \bar{g} := (g, e_H).$$

Auf diese Weise können wir die Elemente von  $G$  als Elemente von  $G \times H$  auffassen. Wenn wir dies tun, gilt

$$\bar{g} \circ \bar{h} := (g, e_H) \circ (e_G, h) := (g \circ e_G, e_H \circ h) = (g, h)$$

sowie ebenso  $(g, h) = \bar{h} \circ \bar{g}$ . Also kommutieren  $\bar{g}$  und  $\bar{h}$  (für beliebige  $g \in G$  und  $h \in H$ ) miteinander. Dies widerspricht dem Wunsch, dass die Elemente von  $G$  und von  $H$  in der gesuchten neuen Gruppe nichts miteinander zu tun haben: immerhin kommutieren sie noch, was eine gewisse spezielle Eigenschaft ist.

Die topologische Bedeutung des Produkts von Gruppen liegt in folgender Aussage:

**Satz 4.14.** Seien  $X \subset \mathbf{R}^m$  und  $Y \subset \mathbf{R}^n$  topologische Räume sowie  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Seien  $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ ,  $(x, y) \mapsto x$  und  $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ ,  $(x, y) \mapsto y$  die Projektionen. Dann ist die Abbildung

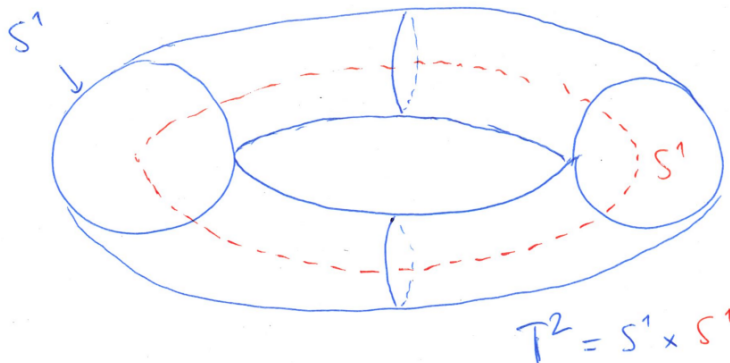
$$\begin{aligned} \pi_1(X \times Y, (x, y)) &\rightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y), \\ \gamma &\mapsto ((p_1)_* \gamma, (p_2)_* \gamma) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus.

**Beispiel 4.15.** Der  $n$ -dimensionale Torus  $T^n$  ist definiert als

$$T^n := S^1 \times \dots \times S^1$$

( $n$  Faktoren).



Die Proposition (und eine Induktion über  $n$ ) zeigen dann einen Isomorphismus

$$\pi_1(T^n) \cong \pi_1(S^1) \times \dots \times \pi_1(S^1) \stackrel{\text{Theorem 3.50}}{\cong} \mathbf{Z}^n.$$

*Beweis.* Zunächst handelt es sich nach der Definition der Gruppenstruktur auf dem Produkt zweier Gruppen und Definition und Lemma 3.63 um einen Gruppenhomomorphismus.

Zur Surjektivität: seien  $\gamma$  und  $\delta$  Schleifen in  $X$  und  $Y$ . Dann ist

$$\rho := \gamma \times \delta : [0, 1] \rightarrow X \times Y, t \mapsto \rho(t) := (\gamma(t), \delta(t))$$

stetig. (Hierbei fassen wir  $X \times Y$  als Teilraum von  $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n}$  auf.) Nach Konstruktion ist  $(p_1)_* \rho = \gamma$  und  $(p_2)_* \rho = \delta$ .

Zur Injektivität: nach Übungsaufgabe 4.2 genügt es zu zeigen, dass der Kern des Homomorphismus trivial ist. Sei also  $\rho$  eine Schleife in  $X \times Y$  mit Aufpunkt  $(x, y)$  derart, dass  $(p_1)_* \rho \sim e_x$  und  $(p_2)_* \rho \sim e_y$ . Anders ausgedrückt: schreiben wir  $\rho(t) = (\gamma(t), \delta(t))$  so sind  $\gamma$  und  $\delta$  nullhomotop, sagen wir vermöge zweier Homotopien  $H$  und  $I$ . (Also  $I(s, 0) = y$ ,  $I(s, 1) = \delta(s)$ ,  $I(0, t) = I(1, t) = y$  usw.). Dann ist die Abbildung

$$H \times I : [0, 1] \times [0, 1], (s, t) \mapsto (H(s, t), I(s, t))$$

! eine Homotopie zwischen  $\rho$  und  $e_{(x, y)}$ , wie man sofort(!) nachprüft. □

**Bemerkung 4.16.** Die gleiche Aussage gilt (mit dem gleichen Beweis) für abstrakte topologische Räume, sofern man  $X \times Y$  mit der sog. *Produkttopologie* versteht.

Ein anderer Versuch, die beiden Gruppen  $G$  und  $H$  möglichst unabhängig voneinander zu kombinieren beginnt mit der (disjunkten) Vereinigung

$$G \sqcup H.$$

Sie enthält die Elemente von  $G$  und von  $H$ . Wir haben jedoch zwei verschiedene Kandidaten für das neutrale Element:  $e_G$  und  $e_H$ .

Probieren wir also

$$\{e\} \sqcup (G \setminus \{e_G\}) \sqcup (H \setminus \{e_H\}).$$

Auch dies ist noch keine Gruppe, da wir keine Handhabe haben  $g \cdot h$  (für  $g \in G$  und  $h \in H$ ) zu definieren. Wir könnten jedoch noch neue Elemente der Form

$$“gh”$$

hinzufügen. Diesen Prozess sollten wir fortführen, um weiterhin alle Produkte zur Verfügung zu haben. Die Idee ist, Elemente von  $G$  und  $H$  als “Worte” nebeneinander zu schreiben. Das freie Produkt (welches man nicht mit dem (direkten) Produkt verwechseln darf) setzt diese Idee nun um:

**Definition 4.17.** Seien  $G, H$  zwei Gruppen.

Video 26.06.20

- Ein *Wort* ist eine endliche (möglicherweise leere) Folge von Elementen in  $(G \setminus \{e_G\}) \sqcup (H \setminus \{e_H\})$ . Wir schreiben ein Wort als

$$w = a_1, a_2, \dots, a_n, n \geq 0$$

wobei die  $a_i$  entweder in  $G$  oder in  $H$  liegen und jeweils nicht das neutrale Element sind. Die Zahl  $n (\geq 0)$  heißt *Länge* von  $w$ . Die  $a_i$  heißen *Buchstaben* des Wortes  $w$ .

- Ein Wort heißt *reduziert*, falls benachbarte Buchstaben nicht beide in  $G$  oder beide in  $H$  sind.
- Falls  $a, b$  beide in  $G$  oder beide in  $H$  liegen, bezeichne  $\overline{a, b}$  das Element  $ab$  von  $G$  bzw.  $H$ , falls dieses Produkt  $\neq e$  ist und ansonsten das leere Wort. (Beachte:  $ab = e$  ist äquivalent zu  $a = b^{-1}$ .)
- Ein *Kind* eines Wortes  $w$  ist ein Wort, welches entsteht, wenn man ein Teilwort  $a, b$  durch  $\overline{a, b}$  ersetzt.
- Ein *Nachkomme* eines Wortes  $w$  ist ein Wort, welches ein Kind eines Kindes eines Kindes ... (in endlich vielen Schritten) von  $w$  ist.

Um das Produkt von Worten zu definieren und bequem zu zeigen, dass dieses Produkt assoziativ ist, verwenden wir folgendes Argument:

**Lemma 4.18.** Jedes Wort hat genau einen reduzierten Nachkommen.

*Beweis.* Sicher hat jedes Wort einen reduzierten Nachkommen: ist

$$w = \dots, a, b, \dots$$

mit  $a, b$  beide in  $G$  (analog beide in  $H$ ), so ist  $\dots, \overline{a, b}, \dots$  ein Nachkomme mit geringerer Länge.

Wir zeigen die Eindeutigkeit: seien  $x$  und  $y$  reduzierte Worte, die beide Nachkommen eines Wortes  $w$  sind. Wir zeigen  $x = y$  per Induktion nach der Länge von  $w$ .

Der Induktionsanfang  $n = 0$  ist klar: das leere Wort hat keine Kinder.

Nun zum Induktionsschritt. Die Kette der Kinder von  $w$  zu  $x$  (bzw. zu  $y$ ) beginne mit einem Wort  $x_1$  (bzw.  $y_1$ ). Es genügt folgende Behauptung zu zeigen:  $x_1$  und  $y_1$  haben einen gemeinsamen Nachkommen  $z$ : falls  $u$  der reduzierte Nachkomme von  $z$  ist, so sind  $x$  und  $u$  beides reduzierte Nachkommen von  $x_1$  und damit nach der Induktionsvoraussetzung  $u = x$ . Ebenso gilt  $u = y$ , d.h.  $x = y$ .

Um diese Behauptung zu zeigen, legen wir folgende Notation fest:  $x_1$  (bzw.  $y_1$ ) entstehe aus  $w$ , indem “ $a, b$ ” durch “ $\overline{a, b}$ ” (bzw. “ $c, d$ ” durch “ $\overline{c, d}$ ”) ersetzt wird. Wir unterscheiden drei Situationen, wie die Teilworte  $a, b$  und  $c, d$  in  $w$  angeordnet sind:

- Falls die Worte  $a, b$  und  $c, d$  das gleiche Teilwort in  $w$  sind, gilt  $x_1 = y_1$  und die Behauptung ist klar.
- Falls die Teilworte  $a, b$  und  $c, d$  in  $w$  nicht überlappen, wählen wir  $z$  indem wir in  $x_1$   $c, d$  durch  $\overline{c, d}$  ersetzen.
- Falls die Teilworte überlappen, aber nicht übereinstimmen, können wir annehmen, dass  $a$  in  $w$  links von  $c$  steht. (Sonst vertauschen wir die Rolle von  $x$  und  $y$ .) Dann gilt  $b = c$  und die drei Elemente  $a, b, d$  sind alle in  $G$  oder alle in  $H$ . Wir betrachten vier Fälle, je nach den Werten von  $ab$  und  $bd$ .
  - $ab = e, bd = e$ . Dann ist  $x_1 = y_1$ .
  - $ab = e, bd \neq e$ . Dann ist  $x_1$  ein Kind von  $y_1$ .
  - Analog für  $ab \neq e, bd = e$ .
  - Falls  $ab \neq e, bd \neq e$  betrachte das Wort  $z$ , welches aus  $x_1$  entsteht, indem  $ab, d$  durch  $\overline{ab, d}$  ersetzt wird. Dann ist  $z$  ein Kind von  $x_1$  und auch von  $y_1$ .  $\square$

**Definition und Lemma 4.19.** Wir definieren das *freie Produkt*

$$G * H$$

zweier Gruppen  $G, H$  als die Menge der *reduzierten* Worte. Für zwei Worte  $v = a_1, \dots, a_m$  und  $w = b_1, \dots, b_n$  ist die Multiplikation

$$v \circ w$$

der nach Lemma 4.18 eindeutige reduzierte Nachkomme des Wortes

$$a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n.$$

Mit dieser Gruppenoperation wird  $G * H$  zu einer Gruppe. Wir nennen sie das *freie Produkt* von  $G$  und  $H$ .

*Beweis.* • Das leere Wort ist das neutrale Element, wir bezeichnen es wieder mit  $e$ .

- Das Inverse eines Wortes  $v = a_1, \dots, a_m$  ist das Wort

$$v^{-1} := a_m^{-1}, \dots, a_1^{-1}$$

(beachte die geänderte Reihung!). In der Tat, es gilt z.B.  $v \circ v^{-1} = e$ , denn das Wort

$$a_1, \dots, a_{m-1}, a_m, a_m^{-1}, a_{m-1}^{-1}, \dots, a_1^{-1}$$

hat als Kind

$$a_1, \dots, a_{m-1}, a_{m-1}^{-1}, \dots, a_1^{-1},$$

dieses (nach  $m - 1$  Schritten) als Nachkomme das leere Wort.

- Seien  $u, v, w$  drei Worte. Wegen Lemma 4.18 gilt dann

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w),$$

denn beide Worte sind reduzierte Nachkommen des Wortes  $u, v, w$ .  $\square$

**Bemerkung 4.20.** Sofern  $G$  und  $H$  beides nicht-triviale Gruppen sind, d.h. nicht nur aus dem neutralen Element bestehen, ist  $G * H$  *nicht* abelsch. Genauer gilt

$$g \circ h \neq h \circ g$$

für alle  $g \in G, g \neq e_G$  und  $h \in H, h \neq e_H$ . In der Tat, es gilt  $g \circ h = g, h$ , denn dieses Wort ist reduziert. Ebenso  $h \circ g = h, g$ . Die Worte  $g, h$  und  $h, g$  sind aber verschieden.

**Beispiel 4.21.** Wir bezeichnen mit

$$F_2 := \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$$

die sog. *freie Gruppe mit 2 Erzeugern*. Konventionsgemäß (und der Klarheit halber) schreiben wir  $a$  für das Element 1 im linken Faktor  $\mathbf{Z}$  und allgemeiner  $a^n$  und für  $n \in \mathbf{Z}$ , wobei  $n$  eine beliebige ganze Zahl ist. Ebenso bedeutet  $b^n$  für  $n \in \mathbf{Z}$  das Element  $n$  im rechten Faktor  $\mathbf{Z}$ . (Der Buchstabe “ $a$ ” und “ $b$ ” ist natürlich nur ein Symbol, welches die beiden Faktoren  $\mathbf{Z}$  voneinander unterscheidet.) Ausdrücke der Form

$$e, a^n, b^n, a^{n_0} b^{n_1}, b^{n_0} a^{n_1}$$

sind also Elemente von  $F_2$ . Hier ist  $e$  das neutrale Element (d.h. das leere Wort) und  $n, n_0, n_1 \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ . Allgemeiner sind die Elemente von der Form

$$[a^{n_0}] b^{n_1} a^{n_2} \dots b^{n_{k-1}} [a^{n_k}], \quad (4.22)$$

wobei  $k \geq 0$ , die  $n_0, \dots, n_k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$  und die eckigen Klammern bedeuten, dass  $a^{n_0}$  bzw.  $a^{n_k}$  im Wort auftauchen kann, jedoch nicht muss. In der Tat, ein Wort z.B. von der Form  $a^{n_0} b^{n_1} b^{n_2}$  ist nicht reduziert, aber hat als reduziertes Kind das Wort  $a^{n_0} b^{n_1+n_2}$ .

Allgemeiner lässt sich die Konstruktion freier Produkte durchführen, wenn nicht nur zwei, sondern endlich viele Faktoren

$$G_1, \dots, G_n$$

gegeben sind. (Es ist auch möglich, freie Produkte beliebig vieler Gruppen zu konstruieren, dies werden wir jedoch nicht benötigen.)

**Satz 4.23.** Sei  $X := \mathbf{R}^2 \setminus \{p, q\}$  für zwei verschiedene Punkte  $p \neq q \in \mathbf{R}^2$ . Sei ferner  $x \in X$  beliebig. Dann besteht ein Isomorphismus

$$(F_2 :=) \mathbf{Z} * \mathbf{Z} \cong \pi_1(X, x).$$

Dies liefert uns also insbesondere das erste Beispiel einer *nicht-abelschen* Fundamentalgruppe.

Insbesondere verlangt der Beweis des Satzes, einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathbf{Z} * \mathbf{Z} \rightarrow \pi_1(X, x)$$

anzugeben. Das folgende Lemma erklärt, wie man diesen und andere ähnliche Gruppenhomomorphismen konstruiert. Man vergleiche diese Aussage auch mit Übungsaufgabe 4.1!

**Lemma 4.24.** Seien  $G_1, \dots, G_n$  und  $H$  Gruppen. Seien  $f_k : G_k \rightarrow H$  Gruppenhomomorphismen. Dann gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus

$$f : G := G_1 * \dots * G_n \rightarrow H,$$

der die Elemente  $g_k \in G_k$  (aufgefasst als Worte der Länge 1 in dem freien Produkt  $G$ ) auf  $f_k(g_k) \in H$  abbildet. Wir bezeichnen diesen Gruppenhomomorphismus mit

$$f_1 * \dots * f_n.$$

Überdies entsteht jeder Gruppenhomomorphismus  $f : G \rightarrow H$  auf diese Weise.

*Beweis.* Um die Notation etwas zu vereinfachen, nehmen wir an, dass  $n = 2$  ist. (Der allgemeine Fall wird genauso bewiesen, nur mit mehr Indizes an allen Elementen.) Ist  $w = [a_1, ] b_2, a_3, \dots, b_{n-1}, [a_n]$  ein reduziertes Wort (die eckigen Klammern geben an, dass die äußeren Terme evtl. nicht auftauchen, vgl. (4.22)) mit  $a_k \in G_1$  und  $b_k \in G_2$ , so definieren wir

$$f(w) := [f_1(a_1) \circ] f_2(b_2) \circ f_1(a_3) \circ \dots \circ f_2(b_{n-1}) [\circ f_1(a_n)].$$

Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus: ist  $w' = [a'_1, ] b'_2, a'_3, \dots, b'_{m-1}, [a'_m]$  ein weiteres reduziertes Wort, so ist beispielsweise  $w \circ w'$  das Wort

$$[a_1, ] b_2, a_3, \dots, b_{n-1}, \overline{a_n, a'_1}, b'_2, a'_3, \dots, b'_{m-1}, [a'_m]$$

falls der Buchstabe  $a_n$  in  $w$  und  $a'_1$  in  $w'$  auftaucht. Es gilt

$$\begin{aligned} f(w \circ w') &= [f_1(a_1)] \circ \cdots \circ f_2(b_{n-1}) \circ f_1(a_n a'_1) \circ f_2(b'_2) \cdots [f_2(b_{n-1})] \\ &= [f_1(a_1)] \circ \cdots \circ f_2(b_{n-1}) \circ f_1(a_n) \circ f_1(a'_1) \circ f_2(b'_2) \cdots [f_2(b_{n-1})] \\ &= f(w) \circ f(w'). \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichheit wurde benutzt, dass  $f_1$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Die anderen Fälle (entweder  $a_n$  oder  $a'_1$  taucht auf, oder nur einer taucht auf) werden ähnlich(!) gezeigt.



Da (nach Definition!) jedes Wort  $w$  wie oben das Produkt von (ggf.  $a_1$ ),  $b_2, \dots, b_{n-1}$ , (ggf.  $a_n$ ) ist, muss für jeden Gruppenhomomorphismus  $f : G_1 * G_2 \rightarrow H$  gelten

$$f(w) = [f(a_1) \circ] f(b_2) \circ \cdots \circ f(b_{n-1}) [f(a_n)].$$



Da die kanonische Inklusion  $G_1 \subset G_1 * G_2$  ein Gruppenhomomorphismus ist(!), ist  $f_1 := f|_{G_1} : G_1 \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus und analog auch  $f_2 := f|_{G_2}$ . Also ist  $f$  automatisch von der behaupteten Gestalt.  $\square$

Wir können nun die Aussage von Satz 4.23 noch einmal etwas präziser formulieren. (Die Festlegung der Punkte  $p$  und  $q$ , die wir hier entfernen ist nur dazu da, um die Notation etwas zu vereinfachen.)

**Satz 4.25.** Sei  $X := \mathbf{R}^2 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$ . Alle Schleifen seien im folgenden mit Aufpunkt  $p := (0, 0)$ . Sei  $U_1 := \{(x, y) \in X, x < 1\}$  und  $U_2 = \{(x, y) \in X, x > -1\}$ . Fixiere eine Schleife  $\alpha$  in  $U_1$  mit  $w(\alpha, (-1, 0)) = 1$  und eine Schleife  $\beta$  in  $U_2$  mit  $w(\beta, (+1, 0)) = 1$ .

Dann haben wir Gruppenisomorphismen

$$f_1 : \mathbf{Z} \rightarrow \pi_1(U_1, p), n \mapsto \alpha^n$$

$$f_2 : \mathbf{Z} \rightarrow \pi_1(U_2, p), n \mapsto \beta^n.$$

Diese Homomorphismen induzieren vermöge Lemma 4.24 einen Gruppenhomomorphismus

$$f_1 * f_2 : \mathbf{Z} * \mathbf{Z} \rightarrow \pi_1(X, p).$$

Dieser Gruppenhomomorphismus ist ein Isomorphismus.

*Beweis.* Die Existenz der Gruppenhomomorphismen  $f_1$  und  $f_2$  ist ein Beispiel von Übungsaufgabe 4.1. Die Inklusion  $S^1 - (1, 0) \subset U_1$  ist ein Deformationsretrakt (dies zeigt man ähnlich wie Beispiel 4.6, z.B. durch Verwendung eines Homöomorphismus  $U_1 \cong \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ ). Damit erhalten wir einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{\cong} \pi_1(S^1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(S^1 - (1, 0)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(U_1).$$

Dieser bildet 1 auf die Schleife  $\alpha$  ab. Komponiere diesen mit dem Homomorphismus, der durch die Inklusion  $U_1 \rightarrow X$  induziert wird, erhalten wir also einen Homomorphismus (diese Komposition ist kein Isomorphismus)

$$f_1 : \mathbf{Z} \xrightarrow{\cong} \pi_1(U_1) \rightarrow \pi_1(X).$$

Analog auch mit  $U_2$ . Die Behauptung, dass es sich bei  $f_1 * f_2$  um einen Isomorphismus handelt, wird später allgemeiner bewiesen, siehe Theorem 4.32.  $\square$

### 4.3 Gruppentheoretische Grundbegriffe

Wir stellen folgende Ähnlichkeit in den Berechnungen von  $\pi_1(S^2)$  und  $\pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{p, q\})$  fest (Satz 4.25 und Theorem 3.59):



| Raum $X$                     | $S^2$  | $\mathbf{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$            |
|------------------------------|--|---|
| offene Teilmengen $U_1, U_2$ | $\{(x, y, z), z > -\frac{1}{2}\},$<br>$\{(x, y, z), z < \frac{1}{2}\}$ | $\{(x, y) \in X, x < 1\}$<br>$\{(x, y) \in X, x > -1\}$ |
| $U_1 \cap U_2$               | Ring $(\cong S^1 \times (0, 1))$                                       | $\{(-1, 1) \times \mathbf{R}$                           |
| $\pi_1(U_1)$                 | 1  | $\mathbf{Z}$  |
| $\pi_1(U_2)$                 | 1  | $\mathbf{Z}$  |
| $\pi_1(U_1 \cap U_2)$        | $\mathbf{Z}$   | 1   |
| $\pi_1(X)$                   | 1  | $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$                               |

Der Satz von van Kampen wird zeigen, dass i.d.R. (d.h. unter schwachen Bedingungen) die Abbildung

$$\pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) \rightarrow \pi_1(X)$$

surjektiv ist. Sie ist in den obigen beiden Fällen ( $S^2$  und  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ ) sogar ein Isomorphismus. Für allgemeine topologische Räume  $X = U_1 \cup U_2$  ist sie jedoch nicht notwendig injektiv. Beispielsweise ist dies für das Komplement (in  $\mathbf{R}^3$ ) von den zwei verknöteten Ringen der Fall. Auch die Fundamentalgruppe in Übungsaufgabe 4.6 (und auch ähnliche Überlegungen für alle anderen Knoten) weisen ein solches Phänomen auf. Wir verschaffen uns nun das nötige gruppentheoretische Handwerkszeug, um die Idee auszudrücken, dass sich der ‘‘Unterschied’’ zwischen beiden Gruppen durch  $\pi_1(U_1 \cap U_2)$  beschreiben lässt.

**Definition 4.26.** Eine Teilmenge  $U \subset G$  heißt *Untergruppe*, wenn  $e_G \in U$  sowie für alle  $u, u' \in U$  gilt:  $u^{-1} \in U$  und  $u \circ u' \in U$ . Eine Untergruppe  $U \subset G$  heißt *Normalteiler*, wenn für alle  $g \in G$

$$g^{-1}Ug := \{g^{-1}ug | u \in U\} = U$$

gilt. In diesem Fall schreibt man

$$U \trianglelefteq G.$$

**Definition und Lemma 4.27.** Sei  $f : (G, \circ) \rightarrow (H, \star)$  ein Gruppenhomomorphismus. Der *Kern* von  $f$  ist definiert als die Teilmenge

$$\ker f := \{g \in G | f(g) = e_H\}.$$

Das *Bild* ist definiert als

$$\operatorname{im} f := \{f(g) | g \in G\}.$$

Der Kern ist stets ein Normalteiler in  $G$ . Das Bild ist stets eine Untergruppe in  $H$  (jedoch nicht notwendig ein Normalteiler).

*Beweis.* Für  $g, h \in \ker f$  ist  $(gh) \in \ker f$  wegen

$$f(gh) = f(g)f(h) = e_H e_H = e_H.$$

Die Behauptungen  $e_G \in \ker f$  und  $g^{-1} \in \ker f$  (für  $g \in \ker f$ ) folgen ebenso schnell mittels Lemma 3.47. Für  $g \in G$  und  $h \in \ker f$  ist

$$f(g^{-1}hg) = f(g^{-1})f(h)f(g) = f(g)^{-1}e_H f(g) = e_H,$$

d.h.  $\ker f$  ist in der Tat ein Normalteiler.

Die Behauptung, dass  $\operatorname{im} f$  eine Untergruppe ist, bleibt dir überlassen: sie folgt ebenso direkt(!) aus der Definition eines Gruppenhomomorphismus sowie Lemma 3.47. □

**Bemerkung 4.28.** • Die Inklusion  $U \subset g^{-1}Ug$  gilt für jede Untergruppe, nur die umgekehrte Inklusion

$$g^{-1}Ug \subset U$$

muss (für jedes  $g \in G$ ) geprüft werden, um zu zeigen, dass  $U$  ein Normalteiler ist.

- Falls  $G$  abelsch ist, so ist *jede* Untergruppe ein Normalteiler, denn dann gilt

$$g^{-1}ug = ug^{-1}g = u$$

für alle  $u \in U, g \in G$ .

- Sei  $G = \text{GL}_2(k)$  die Gruppe der invertierbaren  $2 \times 2$ -Matrizen über einem Körper  $k$  (z.B.  $k = \mathbf{R}$ ).

Die Teilmenge

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\} \subset G$$

ist eine Untergruppe. (Hiermit ist gemeint, dass die Einträge der Matrix in  $k$  sind, und die Matrix insgesamt invertierbar ist). eine Untergruppe ist sie wegen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} aa' & ab' + bd' \\ 0 & dd' \end{pmatrix} \in U, \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} a^{-1} & -\frac{b}{ad} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \in U \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\in U \end{aligned}$$

eine Untergruppe. (Für die zweite Gleichung beachte  $a, d \neq 0$  da die Matrix nach Voraussetzung in  $\text{GL}_2(k)$  ist.) Die Gruppe ist jedoch kein Normalteiler, denn

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ d & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \notin U. \end{aligned}$$

**Beispiel 4.29.** Sei  $G$  eine Gruppe (wir werden dies später auf den Fall  $G = F_2$  anwenden). Für  $g, h \in G$  ist

$$[g, h] := g^{-1}h^{-1}gh$$

- ⓘ der sog. *Kommutator* der Elemente  $g$  und  $h$ . Man überprüft(!) mittels der Rechenregel  $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$  sofort:

$$[g, h]^{-1} = [h, g].$$

Die sog. *Kommutator-Untergruppe* ist die folgende Teilmenge von  $G$ :

$$G' := \{[g_1, h_1][g_2, h_2] \dots [g_n, h_n], n \geq 0, g_k, h_k \in G \text{ beliebig}\}.$$

(Für  $n = 0$  ist mit dem obigen Ausdruck das leere Produkt, d.h. das neutrale Element  $e_G$  gemeint.) Nach der obigen Bemerkung ist diese Teilmenge abgeschlossen unter Inversen. Nach Konstruktion enthält  $G'$   $e_G$  und ist abgeschlossen unter Multiplikation. Es handelt sich bei  $G'$  also in der Tat um eine Untergruppe. Mehr noch: es ist ein Normalteiler: für  $g \in G$  ist

$$g^{-1}[g_1, h_1][g_2, h_2] \dots [g_n, h_n]g \in G'.$$

Dies folgt aus der folgenden Formel (und einer Induktion über  $n$  mittels  $g^{-1}[g_1, h_1][g_2, h_2]g = g^{-1}[g_1, h_1]gg^{-1}[g_2, h_2]g$  etc.):

$$\begin{aligned} g^{-1}[r, s]g &= g^{-1}r^{-1}s^{-1}rsg \\ &= \underbrace{g^{-1}r^{-1}g}_{(g^{-1}rg)^{-1}} \underbrace{g^{-1}s^{-1}g}_{(g^{-1}sg)^{-1}} \underbrace{g^{-1}rg}_{(g^{-1}rg)} \underbrace{g^{-1}sg}_{(g^{-1}sg)} \\ &= (g^{-1}rg)^{-1}(g^{-1}sg)^{-1}(g^{-1}rg)(g^{-1}sg) \\ &= [g^{-1}rg, g^{-1}sg]. \end{aligned}$$

**Definition und Lemma 4.30.** Sei  $N \trianglelefteq G$  ein Normalteiler.



(1) Die Relation

$$g \sim g' :\Leftrightarrow gg'^{-1} \in N$$

ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit  $G/N$  bezeichnet. Für  $g \in G$  bezeichne  $[g] = gN := \{gn, n \in N\}$  die Äquivalenzklasse von  $g$  in  $G/N$ .

(2)  $G/N \times G/N \rightarrow G/N, [g] \circ [g'] := [g \circ g']$  definiert eine Gruppenstruktur auf  $G/N$ ,

(3) Die Abbildung

$$\pi : G \rightarrow G/N, g \mapsto [g] = gN$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus,

(4)  $\ker \pi = N$ .

*Beweis.* Falls  $g = g'n_1$  und  $g' = g''n_2$  mit  $n_1, n_2 \in N$  so ist auch  $g = g'n_1 = g''n_2n_1 \in g''N$ , da  $N$  eine Untergruppe ist. Falls  $g \sim g'$  und  $g' \sim g''$ , d.h.  $gg'^{-1} \in N, g'g''^{-1} \in N$  Die übrigen beiden Bedingungen (Reflexivität und Symmetrie) zeigt man ebenso(!) unter Ausnutzung der übrigen beiden Untergruppenaxiome. ❗

Um zu zeigen, dass die angegebene Gruppenoperation auf  $G/N$  wohldefiniert ist, betrachte für zwei Teilmengen  $A, B \subset G$  das elementweise Produkt

$$AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

Wir zeigen  $(gN)(g'N) = gg'N$ , hieraus folgt die Wohldefiniertheit. In der Tat:

$$\begin{aligned} (gN)(g'N) &= g(Ng')N \\ &= g(g'N)N \text{ da } N \text{ Normalteiler ist} \\ &= gg'NN \\ &= gg'N \text{ da } N \text{ Untergruppe ist.} \end{aligned}$$

Die Behauptungen über  $\pi$  folgen dann schnell:  $\pi$  ist ein Gruppenhomomorphismus:

$$\pi(gg') = gg'N \stackrel{\text{s.o.}}{=} (gN)(g'N) = \pi(g)\pi(g').$$

$$\ker \pi = \{g \text{ so dass } gN = N\} = N :$$

ist  $g \in N$  so folgt  $gN = N$  da  $N$  Untergruppe ist (es gilt  $gN = \{gn \text{ wobei } n \in N\} \subset N$ , da  $N$  Untergruppe ist; es gilt für  $n \in N: n = g \underbrace{g^{-1}n}_{\in N}$ , wiederum da  $N$  Untergruppe ist). Umgekehrt, falls  $gN = N$ , so ist insbesondere  $g = ge_G \in N$ . □

**Definition und Lemma 4.31.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $S \subset G$  eine Teilmenge. (Wir setzen nicht voraus, dass  $S$  in irgendeiner Weise mit der Gruppenstruktur verträglich ist.) Die Teilmenge

$$\bigcap_{S \subset H, H \text{ Normalteiler in } G} H$$

(d.h. der Schnitt aller Normalteiler von  $G$ , die die Teilmenge  $S$  enthalten) ist ein Normalteiler. Sie heißt der von  $S$  erzeugte Normalteiler.

*Beweis.* Im folgenden steht  $H$  immer für einen Normalteiler in  $G$ , der  $S$  enthält. Beispielsweise ist  $\bigcap_H H$  die Teilmenge oben in der Behauptung. Schreibe kurz  $\bar{S} := \bigcap_H H$ .

- Es gilt  $e_G \in H$  für jeden Normalteiler in  $G$ , damit auch  $e_G \in \bar{S}$ .
- Sei  $g, h \in \bar{S}$ , d.h.  $g, h \in H$  für alle  $H$ . Da jedes  $H$  Untergruppe ist, ist auch  $gh \in H$ , d.h.  $gh \in \bar{S}$ .
- Für  $g \in \bar{S}$ , d.h.  $g \in H$  für alle  $H$  ist  $g^{-1} \in H$ , da  $H$  Untergruppe ist. Also  $g \in \bigcap_H H = \bar{S}$ .
- Für  $h \in \bar{S}$  und  $g \in G$  ist  $g^{-1}hg$  in jedem  $H$ , da jedes  $H$  Normalteiler ist. Also ist  $g^{-1}hg \in \bar{S}$ . □

## 4.4 Der Satz von van Kampen

**Theorem 4.32.** (*Satz von van Kampen*) Sei  $X$  ein topologischer Raum und

$$X = U_1 \cup U_2$$

eine offene Überdeckung. Wir nehmen an dass  $U_1, U_2$  und  $U_{12} := U_1 \cap U_2$  wegzusammenhängend seien. Sei schließlich  $x \in U_1 \cap U_2$ . Alle Schleifen und alle Fundamentalgruppen seien mit Aufpunkt  $x$  verstanden.

(1) Die kanonische Abbildung

$$\Phi : \pi_1(U_1, x) * \pi_1(U_2, x) \rightarrow \pi_1(X)$$

ist surjektiv.

(2) Der Kern  $\ker \Phi$  ist der Normalteiler  $N$ , der von den Elementen

$$\iota_1(\gamma)\iota_2(\gamma)^{-1} \tag{4.33}$$

erzeugt wird, wobei  $\gamma \in \pi_1(U_{12})$  und  $\iota_k : \pi_1(U_{12}) \rightarrow \pi_1(U_k)$  den Pushforward längs der Inklusion  $U_{12} \subset U_k$  bezeichnet. ( $\iota_k$  bildet also eine Schleife in  $U_{12}$  auf die gleiche Schleife, nun jedoch aufgefasst als Schleife in  $U_k (\supset U_{12})$ , ab.)

(3) Insgesamt besteht also ein Isomorphismus

$$\pi_1(X) \cong (\pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)) / N.$$

**Bemerkung 4.34.** In einigen Beispielen in der Folge gilt  $\pi_1(U_1 \cap U_2) = 1$ . In diesem Fall ist die Aussage des Satzes also

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2).$$

In der Tat, in (4.33) erhalten wir nur das neutrale Element. Die Untergruppe  $\{1\} \subset \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)$  ist ein Normalteiler (direkt klar nach Definition), damit ist  $N = \{1\}$ .

**Beispiel 4.35.** Wir wenden den Satz auf die Situation von Satz 4.25 an:

- $X = \mathbf{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ ,
- $U_1 = \{(x, y) \in X \mid x < 1\}$ ,  $U_2 = \{(x, y) \in X \mid x > -1\}$ ,
- $x = (0, 0)$ .

Die offenen Teilmengen  $U_1, U_2$  sind wegzusammenhängend, ebenso wie auch  $U_1 \cap U_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 < x < +1\}$ . Der Satz ist also anwendbar. Die Teilmenge  $U_1 \cap U_2$  ist konvex und damit (Übungsaufgabe 3.10) gilt

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, 0) = 1$$

(die triviale Gruppe). Laut Bemerkung 4.34 erhalten wir

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}, x) &\cong \pi_1(U_1, x) * \pi_1(U_2, x) \\ &\cong \mathbf{Z} * \mathbf{Z} \\ &=: F_2. \end{aligned}$$

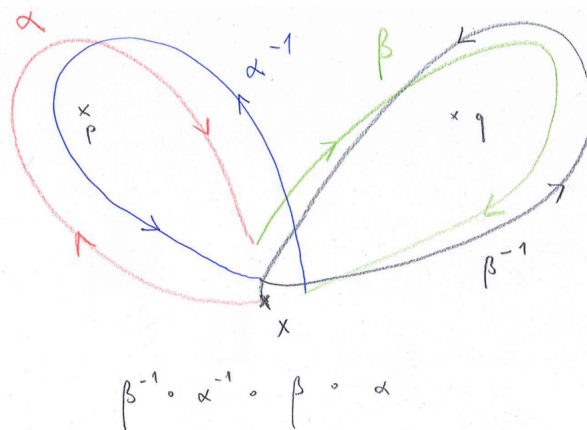
Wie bereits im Beweis von Satz 4.25 angemerkt ist der zweite Isomorphismus gegeben auf den beiden Faktoren

$$\begin{aligned} \pi_1(U_1, x) &\cong \mathbf{Z}, \gamma \mapsto w(\gamma, (-1, 0)) \\ \pi_1(U_2, x) &\cong \mathbf{Z}, \gamma \mapsto w(\gamma, (+1, 0)). \end{aligned}$$

Beispielsweise betrachten wir die Schleife

$$\gamma := \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha$$

wie in der folgenden Skizze (mit  $p = (-1, 0)$ ,  $q = (1, 0)$ ):



Es gilt  $w(\alpha, p) = -1$ , also ist  $\alpha$  (in  $U_1$ ) nicht nullhomotop. Ebenso ist  $w(\beta, q) = -1$ , d.h.  $\beta$  ist in  $U_2$  nicht nullhomotop. Insbesondere gilt laut Bemerkung 4.20

$$\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha (\in \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)).$$

Multiplizieren wir von links mit  $\alpha^{-1}$  und dann mit  $\beta^{-1}$  erhalten wir

$$\gamma := \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha \neq e.$$

Anders gesagt: die Schleife  $\gamma$  ist in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{p, q\}$  nicht zusammenziehbar.

Andererseits: in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{p\}$  ist die Schleife  $\beta$  nullhomotop (wegen  $w(\beta, p) = 0$ ). Also gilt in  $\pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{p\}, x)$ :  $[\beta] = e$  ( $e := e_x$  ist die Schleife die im Aufpunkt  $x$  verharret), und daher

$$\begin{aligned} \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha &= e \circ \alpha^{-1} \circ e \circ \alpha \\ &= \alpha^{-1} \circ \alpha \\ &= e. \end{aligned}$$

Anders gesagt: in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{p\}$  ist  $\gamma$  zusammenziehbar (und analog auch in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{q\}$ ), hingegen in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{p, q\}$  ist  $\gamma$  nicht zusammenziehbar! Hiermit ist die Lösung des Medaillenproblems (Frage 1.4 und Bemerkung 3.36) abgeschlossen.

**Beispiel 4.36.** Die Berechnung von  $\pi_1(S^2) = 1$ , die wir in Theorem 3.59 bereits durchgeführt haben ist ebenfalls ein Spezialfall des Satzes: wir wenden die Notation aus der Tabelle auf S. 79 an:  $U_1 = \{(x, y, z) \in S^2, z > -\frac{1}{2}\}$ ,  $U_2 = \{(x, y, z), z < \frac{1}{2}\}$  und auch  $U_1 \cap U_2$  sind wegzusammenhängend. Als Aufpunkt wählen wir den Punkt  $p := (0, 0, 1) (\in U_1 \cap U_2)$ . In diesem Fall ist zwar  $\pi_1(U_1 \cap U_2, p)$  nicht die triviale Gruppe, aber das Bild von

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, p) \rightarrow \pi_1(U_k, p), k = 1, 2$$

ist trivial (d.h. besteht nur aus dem neutralen Element), da die Gruppen  $\pi_1(U_k, p)$  beide trivial sind. Also sind die Elemente in (4.33) auch in diesem Fall nur das neutrale Element, so dass wir erhalten

$$\begin{aligned} \pi_1(S^2, p) &\cong \pi_1(U_1, p) * \pi_1(U_2, p) \\ &\cong 1 * 1 \\ &\cong 1. \end{aligned}$$

(Wieder bezeichnet 1 hier die triviale Gruppe. Das freie Produkt  $1 * 1$  besteht nach Definition nur aus dem neutralen Element, weil reduzierte Worte nach Definition nur aus den Elementen gebildet werden, die nicht die neutralen Elemente sind.) Da  $S^2$  wegzusammenhängend ist, erhalten wir mittels Lemma 3.69 auch einen Isomorphismus

$$\pi_1(S^2, x) \cong 1$$

für jeden anderen Punkt  $x \in S^2$ , wie z.B. den Nordpol.

**Beispiel 4.37.** Betrachte  $X = S^1$  sowie

$$U_1 = \left\{ (x, y) \in S^1 \mid y < \frac{1}{2} \right\}$$

und

$$U_2 = \left\{ (x, y) \in S^1 \mid y > -\frac{1}{2} \right\}.$$

Es handelt sich um eine offene Überdeckung. Die Schnittmenge  $U_1 \cap U_2$  ist jedoch *nicht* wegzusammenhängend. Daher ist der Satz von van Kampen (in der Formulierung von Theorem 4.32) *nicht* anwendbar. Überdies ist auch die Aussage im Teil (1) des Satzes falsch, denn  $\pi_1(U_1) = \pi_1(U_2) = 1$ , die triviale Gruppe, da beide  $U_k$  homöomorph zu  $\mathbf{R}$  sind, und  $\pi_1(\mathbf{R}) = 1$  gilt. Damit ist auch  $\pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) = 1$  die triviale Gruppe, wohingegen wir  $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$  (Theorem 3.50) wissen. Es kann jedoch keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus  $1 \rightarrow \mathbf{Z}$  geben, da letztere Gruppe aus mehr als einem Element besteht.

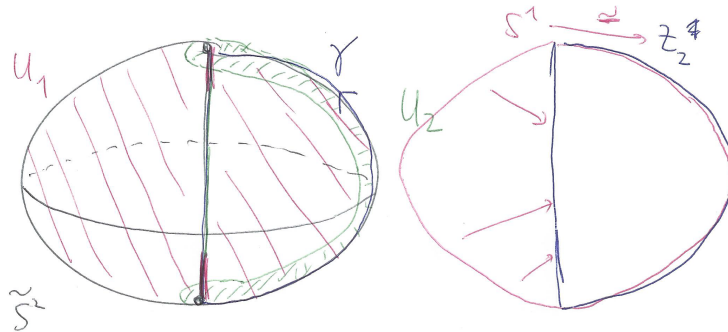
**Beispiel 4.38.** Wir berechnen die Fundamentalgruppe des Raumes (siehe Beispiel 4.9)

$$X := \tilde{S}^2 := S_R^2 \cup [(0, 0, R), (0, 0, -R)]$$

mittels des Satzes von van Kampen. Wir wählen hierzu  $U_1, U_2 \subset \tilde{S}^2$  mit folgenden Eigenschaften:

- $U_1, U_2$  sowie  $U_1 \cap U_2$  sind wegzusammenhängend,
- $Z_1 := S^2 \subset U_1$  ist ein Deformationsretrakt,
- $Z_2 := \{(x, y, z) \in \tilde{S}^2 \mid y = 0, x \geq 0\} \subset U_2$  ist ebenfalls ein Deformationsretrakt,
- $Z_{12} := Z_1 \cap Z_2$  ist ein Deformationsretrakt von  $U_{12} := U_1 \cap U_2$ .

Dies können wir z.B. wie in der Skizze angedeutet wählen:



In der folgenden Tabelle sind die relevanten offenen Teilmengen von  $X$ , sowie geeignete abgeschlossene Teilräume, so dass die Inklusion  $Z \subset U$  jeweils ein Deformationsretrakt ist, sowie ein grundlegender Raum  $E$ , der zu  $Z$  homöomorph ist. Wir erhalten aus Folgerung 3.67 und Lemma 4.8 Isomorphismen

$$\pi_1(E) \cong \pi_1(Z) \cong \pi_1(U),$$

die konkreten Werte dieser Gruppen sind in der letzten Spalte angegeben.

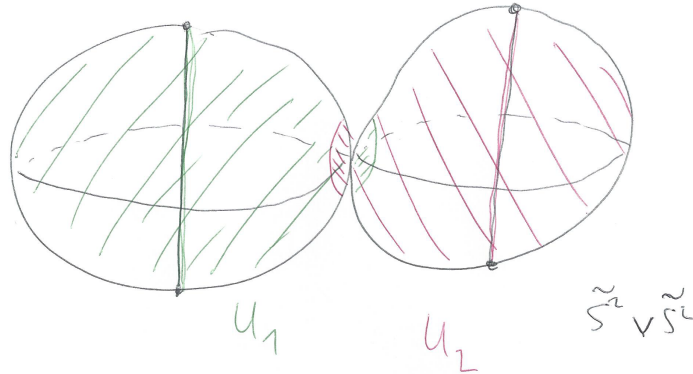
| “einfacher” Raum $E$ | $Z \subset X$ (abgeschlossen) | $U \subset X$ (offen) | $\pi_1$            |
|----------------------|-------------------------------|-----------------------|--------------------|
| $\mathbf{R}$         | $Z_{12}$                      | $U_{12}$              | 1                  |
|                      | $Z_1 = S^2$                   | $U_1$                 | 1                  |
| $S^1$                | $Z_2$                         | $U_2$                 | $\cong \mathbf{Z}$ |

Der Satz von van Kampen besagt dann

$$\pi_1(\tilde{S}^2) = \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) \cong 1 * \mathbf{Z} = \mathbf{Z}.$$

Wählen wir den Homöomorphismus  $S^1 \rightarrow Z_2$  wie skizziert, so wird unter diesem Isomorphismus (von rechts nach links)  $1 \in \mathbf{Z}$  auf die Schleife  $\gamma$  wie skizziert abgebildet.

**Beispiel 4.39.** Wir können die Berechnungsmethode, die wir für  $\tilde{S}^2$  verwendet haben, auch anwenden auf  $X := \tilde{S}^2 \vee \tilde{S}^2$  (siehe auch die Bemerkungen auf S. 71):



| “einfacher” Raum $E$ | $Z \subset X$ (abgeschlossen)      | $U \subset X$ (offen) | $\pi_1$                            |
|----------------------|------------------------------------|-----------------------|------------------------------------|
| $\{*\}$              | $Z_{12}$                           | $U_{12}$              | $1$                                |
|                      | $Z_1 = \tilde{S}^2$ (erste Kopie)  | $U_1$                 | $\cong \mathbf{Z}$ (Beispiel 4.38) |
|                      | $Z_2 = \tilde{S}^2$ (zweite Kopie) | $U_2$                 | $\cong \mathbf{Z}$ (Beispiel 4.38) |

Wir bestätigen mittels des Satzes von van Kampen die Behauptung auf S. 71:

$$\pi_1(\tilde{S}^2 \vee \tilde{S}^2) \cong \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) \cong \pi_1(Z_1) * \pi_1(Z_2) = \mathbf{Z} * \mathbf{Z}.$$

Unter diesem Isomorphismus wird (in der Notation von Beispiel 4.21) das Element

$$a^{n_0} b^{n_1} \dots a^{n_k} \in F_2 = \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$$

auf die Schleife

$$\alpha^{n_0} \circ \beta^{n_1} \circ \dots \circ \alpha^{n_k} \in \pi_1(\tilde{S}^2 \vee \tilde{S}^2)$$

abgebildet. Laut Beispiel 4.10 (in Verbindung mit Lemma 4.8) haben wir einen Isomorphismus

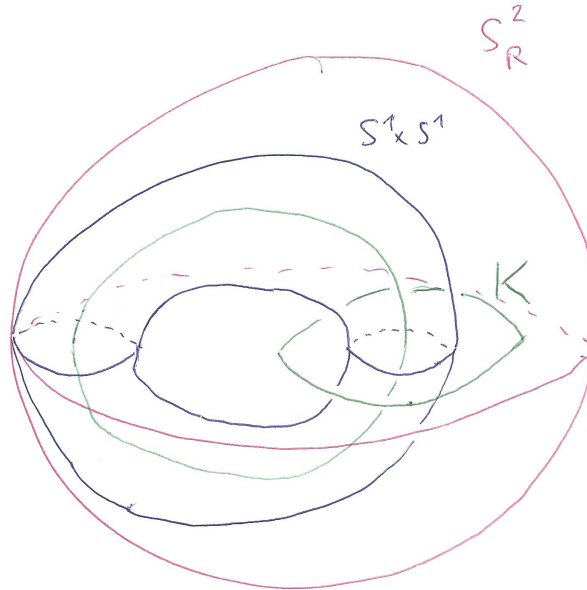
$$\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus \{\text{zwei unverknotete Kreise}\}) \cong \pi_1(\tilde{S}^2 \vee \tilde{S}^2).$$

Komponieren wir diese beiden Isomorphismen, so erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathbf{Z} * \mathbf{Z} \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus \{\text{zwei unverknotete Kreise}\})$$

der z.B.  $a \in \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$  auf die Schleife  $\alpha$  in der Skizze auf S. 68 und  $b \in \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$  auf die Schleife  $\beta$  abbildet.

**Beispiel 4.40.** Sei  $K$  die disjunkte Vereinigung zweier verknoteter Ringe wie in der folgenden Skizze:



Wir wenden den Satz von van Kampen an, um

$$\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus K) \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$$

zu zeigen. Wir nutzen hierzu, dass die Vereinigung einer  $S_R^2$  (mit einem Radius  $R > 1$ ) mit einem Torus  $S^1 \times S^1$  ein Deformationsretrakt ist:

$$X := S_R^2 \vee (S^1 \times S^1) \subset \mathbf{R}^3 \setminus K.$$

Wir wenden den Satz von van Kampen wieder an auf offene Umgebungen (in  $X$ ) von  $S_R^2 \subset U_1$  und  $S^1 \times S^1 \subset U_2$  so dass diese Teilmengen jeweils Deformationsretrakt von  $U_1$  bzw.  $U_2$  sind, etwa so wie in der folgenden Skizze: dann ist  $U_1, U_2$  und  $U_1 \cap U_2$  wegzusammenhängend und es gilt  $\pi_1(U_1 \cap U_2) = 1$ , denn  $\{*\} = S_R^2 \cap (S^1 \times S^1) \subset U_1 \cap U_2$  ist ebenfalls ein Deformationsretrakt. Wir erhalten also (Bemerkung 4.34 und Satz 4.14)

$$\begin{aligned} \pi_1(X) &\cong \pi_1(S_R^2) * \pi_1(S^1 \times S^1) \\ &\cong 1 * (\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}) \\ &\cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

## 4.5 Der Beweis des Satzes von van Kampen

Wir beweisen nun Theorem 4.32.

*Beweis.* Zunächst einige Bemerkungen zur Abbildung  $\Phi$ . Die Elemente im freien Produkt  $\pi_1(U_1) * \dots * \pi_1(U_n)$  sind (reduzierte) Worte

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r, \tag{4.41}$$

so dass die Buchstaben, d.h. hier die  $\gamma_s$ , jeweils Elemente aus einer der Gruppen  $\pi_1(U_k)$  (mit  $k = 1, 2$ ) sind, also sagen wir  $\gamma_s$  sei eine Schleife in  $U_{k_s}$ . Die Abbildung  $\Phi$  ist (der laut Lemma 4.24 eindeutige) Gruppenhomomorphismus mit der Eigenschaft, dass seine Einschränkung auf die Untergruppen

$$\pi_1(U_k) \subset \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)$$

gerade der Pushforward längs der Inklusion  $U_k \subset X$  ist. Anders gesagt, ein Wort wie in (4.41) wird abgebildet auf

$$\Phi((\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)) = \iota_{k_1}(\gamma_1) \circ \iota_{k_2}(\gamma_2) \circ \dots \circ \iota_{k_r}(\gamma_r).$$

Die Surjektivität von  $\Phi$  bedeutet also, dass jede Schleife  $\gamma$  in  $X$  homotop zu einer Schleife in dieser Form ist. Etwas laxer geschrieben (d.h. ohne die  $\iota_{k_s}$ ): wir müssen zeigen:

$$\gamma \sim \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_r, \quad (4.42)$$

wobei jedes  $\gamma_s$  in einer der Teilmengen  $U_{k_s}$  enthalten ist.

Mit dieser Einsicht beginnen wir den Beweis von Teil (1): sei eine Schleife  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  also gegeben. Wir zeigen die Aussage (4.42) ähnlich wie im Beweis von Theorem 3.59, indem wir zunächst folgende Behauptung zeigen: es gibt eine Zerlegung

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1,$$

mit der Eigenschaft, dass jedes Intervall  $[t_{i-1}, t_i] (\subset [0, 1])$  unter  $\gamma$  auf eine der Teilmengen  $U_k$  abgebildet wird: da  $\gamma$  stetig ist, hat jedes  $t \in [0, 1]$  eine (in  $[0, 1]$ ) offene Umgebung  $V_t$  so dass  $\gamma(V_t)$  in einem  $U_k$  enthalten ist. Wir können (nach Definition offener Mengen in  $[0, 1]$ ) annehmen, dass  $V_t = (t - \epsilon, t + \epsilon) \cap [0, 1]$  ist. Durch Verkleinern von  $\epsilon$  können wir überdies annehmen, dass sogar  $[t - \epsilon, t + \epsilon]$  unter  $\gamma$  ganz in eines der  $U_k$  abgebildet wird. Wir erhalten so eine offene Überdeckung

$$[0, 1] = \bigcup_{t \in [0, 1]} V_t.$$

Da  $[0, 1]$  kompakt ist (Theorem 2.14), hat diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung. Die Endpunkte dieser (endlich vielen) offenen Teilintervalle liefern also eine Zerlegung von  $[0, 1]$  wie oben behauptet.

Schreibe  $\gamma_i := \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  ( $1 \leq i \leq m$ ). Diese Teilstücke sind Pfade (jedoch i.A. keine Schleifen), die in  $U_{k_i}$  verlaufen. Da  $U_{k_i} \cap U_{k_{i+1}}$  nach Voraussetzung wegzusammenhängend ist, können wir einen Pfad  $\delta_i$  (in  $U_{k_i} \cap U_{k_{i+1}}$ ) wählen, der vom Aufpunkt  $x$  zu  $\gamma(t_i)$  verläuft. Die Schleife

$$\underbrace{\gamma_m \circ \delta_{m-1}}_{\text{in } U_{k_m}} \circ \underbrace{\delta_{m-1}^{-1} \circ \gamma_{m-1} \circ \delta_{m-2}}_{\text{in } U_{k_{m-1}}} \circ \dots \circ \underbrace{\delta_2^{-1} \circ \gamma_2 \circ \delta_1}_{\text{in } U_{k_2}} \circ \underbrace{\delta_1^{-1} \circ \gamma_1}_{\text{in } U_{k_1}} \quad (4.43)$$

ist homotop zu  $\gamma$  (Übungsaufgabe 3.4). Beachte, dass die Teilpfade in der Tat in den angegebenen Teilmengen liegen, da dies für  $\gamma_s$  gilt und da  $\text{supp } \delta_k \in U_1 \cap U_2$ , d.h. sowohl in  $U_{k_i}$  als auch in  $U_{k_{i+1}}$  liegt. Außerdem ist Anfangs- und Endpunkt dieser Teilpfade jeweils gleich, d.h. es handelt sich um *Schleifen* in den  $U_{k_i}$ . Also haben wir mit (4.43) Komposition von Schleifen gefunden wie behauptet, d.h. die Surjektivität von  $\Phi$ , d.h. Teil (1), ist bewiesen.

Die Aussagen (2) und (3) sind nach Übungsaufgabe 4.3 äquivalent. Wir zeigen nun also

$$\ker \Phi = N.$$

Zur Inklusion  $N \subset \ker \Phi$ : hierzu reicht es zu zeigen, dass die Erzeuger von  $N$  in  $\ker \Phi$  liegen, d.h.

$$\iota_1(\gamma)\iota_2(\gamma)^{-1} \in \ker \Phi.$$

(Da  $\ker \Phi$  laut Definition und Lemma 4.27 ein Normalteiler von  $\pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)$ , ist  $N$  demzufolge in  $\ker \Phi$  enthalten.) In der Tat,  $\Phi$  bildet dieses Element ab auf  $\tilde{\gamma}(\tilde{\gamma})^{-1} = e_x$ , wobei  $\tilde{\gamma}$  die gleiche Schleife wie  $\gamma$  ist, nun jedoch aufgefasst als Schleife in  $X$ .

Zur umgekehrten Inklusion  $N \supset \ker \Phi$ . Sei

$$\gamma = [\alpha_1]_{U_{k_1}} \circ \dots \circ [\alpha_r]_{U_{k_r}}$$

ein Element in  $\ker \Phi$ . Hierbei bedeutet die Notation, dass  $\alpha_s$  eine Schleife in  $U_{k_s}$  ist und  $[-]$  bezeichnet die Homotopieklasse von Schleifen (in dem jeweiligen  $U_{k_s}$ ). Es gibt also eine Homotopie

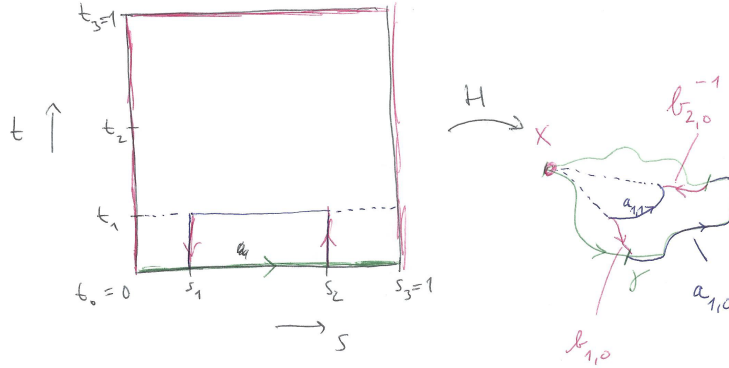
$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

zwischen den Schleifen  $\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_r$  und der konstanten Schleife  $e_x$ . Es gibt dann Zerlegungen  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$  und  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_q = 1$  derart, dass die Rechtecke

$$R_{ij} := [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$$

unter  $F$  in eine der beiden Mengen  $U_1$  oder  $U_2$  abgebildet werden. Solche Zerlegungen erhalten wir, indem wir (wie oben!)  $[0, 1] \times [0, 1]$  zunächst durch Rechtecke  $[a, b] \times [c, d]$  überdecken, die unter  $F$  jeweils in eines der  $U_k$  abgebildet werden, anschließend die Kompaktheit von  $[0, 1]^2$  ausnutzen (Theorem 2.14!) und anschließend für die  $s_i$  und  $t_j$  all die Grenzen dieser Rechtecke die hierbei auftauchen, wählen. Indem wir die  $s$ -Zerlegung eventuell verfeinern können wir annehmen, dass die Intervalle auf denen die Pfade  $\alpha_j$  definiert sind, aus (endlichen) Vereinigungen der Intervalle  $[s_{i-1}, s_i]$  bestehen.

Bezeichne mit  $v_{ij} := (s_i, t_j)$  sowie mit  $a_{ij}$  den Pfad (in  $X$ ), der entsteht, indem wir  $H$  auf die horizontale Kante  $[v_{ij}, v_{i+1, j}]$  anwenden und  $b_{ij}$  analog mit der vertikalen Kante  $[v_{ij}, v_{i, j+1}]$ .



Es ist dann also  $\alpha_i = a_{p_{i-1}, 0} \circ \dots \circ a_{p_i, 0}$  für gewisse  $p_i$ , so dass also

$$\gamma = [\alpha_1]_{U_{k_1}} \circ \dots \circ [\alpha_r]_{U_{k_r}} = [a_{0,0} \circ \dots \circ a_{p_1,0}]_{U_{k_1}} \dots [a_{p_{r-1},0} \circ \dots \circ a_{p_r,0}]_{U_{k_r}}.$$

Die Wege  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$  sind Pfade, jedoch keine Schleifen. Da  $U_1 \cap U_2$  wegzusammenhängend ist, können wir jedoch Wege  $h_{ij}$  vom Aufpunkt  $x$  zu  $H(v_{ij})$  wählen, die in  $U_1$  bzw. in  $U_2$  bzw. in  $U_{12}$  liegen (je nachdem in welcher dieser Mengen der Punkt  $v_{ij}$  liegt). Durch Einfügen von Pfaden der Form  $h_{ij}(h_{ij})^{-1}$  können wir (wie im Beweis der Surjektivität in Teil (1)) *Schleifen* (im Gegensatz zu Pfaden)  $\tilde{a}_{ij}$  und  $\tilde{b}_{ij}$  finden, die jeweils in  $U_1$  oder in  $U_2$  enthalten sind, so dass

$$\gamma = [\tilde{a}_{0,0}]_{U_{k_1}} \circ \dots \circ [\tilde{a}_{p_1,0}]_{U_{k_1}} \dots [\tilde{a}_{p_{r-1},0}]_{U_{k_r}} \circ \dots \circ [\tilde{a}_{p_r,0}]_{U_{k_r}}.$$

Vermöge der Abbildung  $H$  erhalten wir eine Homotopie zwischen den Schleifen  $\tilde{a}_{i,0}$  und  $\tilde{b}_{i,0} \tilde{a}_{i,1} \tilde{b}_{i+1,0}^{-1}$ . Um die Notation festzulegen, nehmen wir an, dass  $\tilde{a}_{i,0}$  in  $U_1$  liegt (der Fall in  $U_2$  geht genau analog). Die o.g. Homotopie liegt in  $U_1$  oder in  $U_2$  (da das Rechteck mit den Ecken  $v_{i,0}, v_{i+1,0}, v_{i+1,1}, v_{i,1}$  unter  $H$  auf  $U_1$  oder  $U_2$  abgebildet wird). Falls die Homotopie in  $U_1$  stattfindet, so gilt in  $\pi_1(U_1)$ :

$$[\tilde{a}_{i,0}] = [\tilde{b}_{i,0}]_{U_1} [\tilde{a}_{i,1}]_{U_1} [\tilde{b}_{i+1,0}]_{U_1}^{-1}$$

d.h. auch in  $\pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)$  gilt

$$\gamma = \dots [\tilde{a}_{i,0}]_{U_1} \dots = \dots [\tilde{b}_{i,0}]_{U_1} [\tilde{a}_{i,1}]_{U_1} [\tilde{b}_{i+1,0}]_{U_1}^{-1} \dots \quad (4.44)$$

Wenn die Homotopie hingegen in  $U_2$  stattfindet, dann liegt die Schleife  $\tilde{a}_{i,0}$  in  $U_1 \cap U_2$ . Es gilt dann also

$$[\tilde{a}_{i,0}]_{U_1} = \iota_1(\tilde{a}_{i,0}) \iota_2(\tilde{a}_{i,0})^{-1} [\tilde{a}_{i,0}]_{U_2} \in \pi_1(U_1)$$

sowie

$$[\tilde{a}_{i,0}]_{U_2} = [\tilde{b}_{i,0}]_{U_2} [\tilde{a}_{i,1}]_{U_2} [\tilde{b}_{i+1,0}]_{U_2}^{-1} \in \pi_1(U_2).$$

Wir erhalten also

$$\gamma = \dots [\tilde{a}_{i,0}]_{U_1} \dots = \dots \underbrace{\iota_1(\tilde{a}_{i,0}) \iota_2(\tilde{a}_{i,0})^{-1}}_{\in N} [\tilde{b}_{i,0}]_{U_2} [\tilde{a}_{i,1}]_{U_2} [\tilde{b}_{i+1,0}]_{U_2}^{-1} \dots$$



Da  $N \subset \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)$  der Normalteiler ist, der von den angegebenen Elementen erzeugt wird, gilt  $N[\tilde{b}_{i,0}]_{U_2} = [\tilde{b}_{i,0}]_{U_2}N$ , d.h. es gibt ein  $n_i \in N$  mit

$$\iota_1(\tilde{a}_{i,0})\iota_2(\tilde{a}_{i,0})^{-1}[\tilde{b}_{i,0}]_{U_2} = [\tilde{b}_{i,0}]_{U_2}n_i.$$

Wir erhalten also

$$\gamma = \dots [\tilde{a}_{i,0}]_{U_1} \dots = \dots [\tilde{b}_{i,0}]_{U_2}n_i[\tilde{a}_{i,1}]_{U_2}[\tilde{b}_{i+1,0}]_{U_2}^{-1} \dots \quad (4.45)$$

In beiden Fällen, also in (4.44) und (4.45) führen wir dieses Argument für jedes einzelne  $\tilde{a}_{i,0}$  aus. Die benachbarten  $\tilde{b}_{i,0}$  und  $\tilde{b}_{i,0}^{-1}$  kürzen sich weg. Da (nach Definition einer Homotopie)  $H(0, t) = H(1, t) = x$  sind alle  $b_{0,j}$  und  $b_{p_k,j}$  die konstanten Schleifen am Aufpunkt  $x$ . Damit gilt auch  $[\tilde{b}_{0,j}] = [\tilde{b}_{p_k,j}] = 1$  (das neutrale Element). Indem wir dies benutzen sehen wir also, dass  $\gamma$  ein Produkt von Elementen der Form  $[\tilde{a}_{i,1}]$  und (ggf.) Elementen  $n_i \in N$  ist. Wiederum da  $N$  ein Normalteiler ist, d.h. dass  $N[\tilde{a}_{i,1}] = [\tilde{a}_{i,1}]N$  gilt, gibt es ein  $n \in N$  mit der Eigenschaft

$$\gamma = [\tilde{a}_{0,1}] \dots [\tilde{a}_{p_r,1}]n.$$

Um also zu zeigen, dass  $\gamma \in N$  liegt, genügt es zu zeigen dass das Produkt der vorderen Terme in  $N$  liegt. Daher können wir eine Induktion über die Länge der Zerlegung  $0 = t_0 < \dots < t_q = 1$  durchführen und erhalten

$$\gamma \in [\tilde{a}_{0,q}] \dots [\tilde{a}_{p_r,q}]N.$$

Da  $H(s, t_q) = H(s, 1) = x$  für alle  $s \in [0, 1]$  ist, ist jedes  $a_{i,q}$  und damit auch  $\tilde{a}_{i,q}$  die konstante Schleife am Aufpunkt  $x$ . Insgesamt erhalten wir also die Behauptung  $\gamma \in N$ .  $\square$

## 4.6 Übungsaufgaben

**Übungsaufgabe 4.1.** Sei  $G$  eine Gruppe. Für  $g \in G$  bezeichne

$$g^n := \begin{cases} g \circ \dots \circ g (n \text{ mal}) & n \geq 0 \\ g^{-1} \circ \dots \circ g^{-1} (|n| \text{ mal}) & n < 0. \end{cases}$$

Zeige: es gibt genau einen Gruppenhomomorphismus

$$f_g : \mathbf{Z} \rightarrow G,$$

der 1 auf  $g$  abbildet.

Zeige ferner: für jeden Gruppenhomomorphismus  $f : \mathbf{Z} \rightarrow G$  gilt

$$f = f_g, \quad \text{mit } g := f(1).$$

**Übungsaufgabe 4.2.** Sei  $f : (G, \circ) \rightarrow (H, \star)$  ein Gruppenhomomorphismus. Der Kern von  $f$  ist definiert als die Teilmenge

$$\ker f := \{g \in G \mid f(g) = e_H\}.$$

Zeige:

- für  $g, g' \in \ker f$  ist auch  $g^{-1}$  und  $g \circ g' \in \ker f$ . Außerdem ist  $e_G \in \ker f$ . (Teilmengen von  $G$ , die diese beiden Eigenschaften haben, werden als *Untergruppe* bezeichnet. Also:  $\ker f \subset G$  ist eine Untergruppe.)
- $f$  ist injektiv genau dann, wenn  $\ker f = \{e_G\}$ .

**Übungsaufgabe 4.3.** Sei  $f : G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass  $f$  einen Gruppenisomorphismus

$$G/\ker f \xrightarrow{\cong} \text{im } f$$

induziert.

Insbesondere: falls  $f$  surjektiv ist, induziert  $f$  einen Gruppenisomorphismus

$$G/\ker f \xrightarrow{\cong} H.$$

**Übungsaufgabe 4.4.** Die *Abelianisierung* einer Gruppe  $G$  ist definiert als

$$G_{\text{ab}} := G/G'.$$

Hierbei bezeichnet  $G'$  die Kommutator-Untergruppe.

Zeige, dass  $G_{\text{ab}}$  eine abelsche Gruppe ist.

**Übungsaufgabe 4.5.** Betrachte den (laut Lemma 4.24) eindeutigen Gruppenhomomorphismus der das Element 1 in der ersten Kopie von  $\mathbf{Z}$  (in  $F_2$ ) auf  $(1, 0)$  abbildet und das Element 1 in der zweiten Kopie von  $\mathbf{Z}$  auf  $(0, 1)$  abbildet:

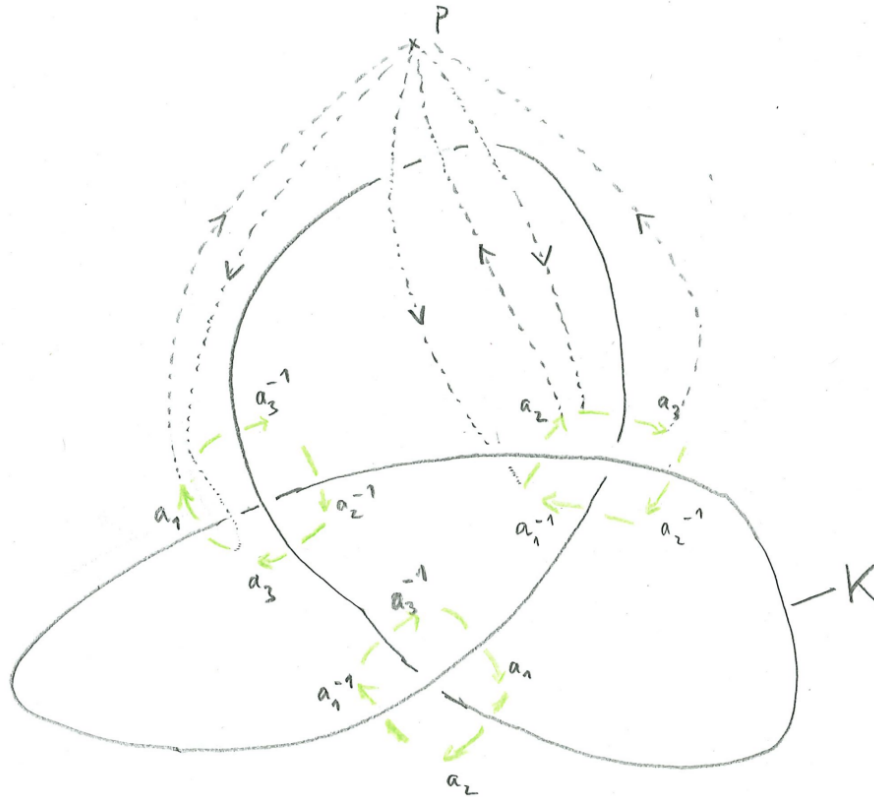
$$F_2 := \mathbf{Z} * \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}.$$

Zeige: dieser Gruppenhomomorphismus ist surjektiv, jedoch kein Isomorphismus. Zeige: er induziert einen Isomorphismus

$$(F_2)_{\text{ab}} \rightarrow \mathbf{Z}^2$$

zwischen der Abelianisierung von  $F_2$  und  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ .

**Übungsaufgabe 4.6.** Sei  $K$  der Kleeblattknoten, so wie in der Skizze gezeichnet:



Seien  $a_1, a_2, a_3$  die Schleifen in  $\mathbf{R}^3 \setminus K$  deren Aufpunkt  $p$  “weit vor” dem Knoten liegt und jeweils wie angegeben vor den Schlingen des Knotens in der angegebenen Richtung verlaufen und ansonsten direkt vom bzw. zum Aufpunkt verlaufen. Beispielsweise die Schleife  $a_1$  verläuft vom Aufpunkt entlang der gestrichelten Linie vor der linken unteren Schlinge in  $K$ , dann unterhalb der linken Schlinge des Knotens (grün gezeichnet), dann wieder zurück zum Aufpunkt. Ähnlich ist bei den übrigen Schleifen jeweils der Pfad vom Aufpunkt zum Beginn des grünen Pfeils vor dem Kleeblattknoten  $K$  hinzuzufügen, sowie am Ende des grünen Pfeils ein Weg, ebenfalls vor der Kleeblattschlinge, zurück zum Aufpunkt.

Zeige, dass in  $G := \pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus K)$  folgende Gleichungen gelten:

$$a_1 a_3^{-1} a_2^{-1} a_3 = e$$

$$a_3 a_2^{-1} a_1^{-1} a_2 = e$$

$$a_2 a_1^{-1} a_3^{-1} a_1 = e.$$

Tipp: jede dieser Gleichungen stammt von einer der Überkreuzungen in der Schlinge  $K$ . Orientiere dich beim Beweis dieser Gleichungen an der Diskussion der Fundamentalgruppe von  $\mathbf{R}^3 \setminus \{\text{zwei verknotete Ringe}\}$ .

Setze  $a := a_2 a_3 a_2$  und  $b := a_3 a_2$ . Zeige anhand der obigen Gleichungen, dass in  $G$  gilt:

$$a^2 = b^3$$

(hierbei  $a^2 := aa$ ,  $b^3 = bbb$ ).

Bemerkung: man kann zeigen, dass die Elemente  $a$  und  $b$  die Gruppe  $G$  erzeugen und dass die obige letztere Relation die einzige nicht-triviale Relation in  $G$  ist.

### 4.6.1 Präsenzaufgaben für die Übungen

**Übungsaufgabe 4.7.** Eine maximale wegzusammenhängende Teilmenge  $Y \subseteq X$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt *Wegzusammenhangskomponente*, d.h. für jede wegzusammenhängende Teilmenge  $Y' \subseteq X$  mit  $Y \subseteq Y'$  gilt schon  $Y = Y'$ .

- Es seien  $y, y' \in Y$  zwei Punkte, die in derselben Wegzusammenhangskomponente  $Y \subseteq X$  liegen. Zeige, dass es einen Gruppenisomorphismus  $\pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(X, y')$  gibt. (Wiederhole Lemma 3.69)
- Zeige, dass es für alle  $y, y' \in Y$  einen Gruppenisomorphismus  $\pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(Y, y')$  gibt.

**Übungsaufgabe 4.8.** Zeige, dass die kanonische Inklusion  $S^n \subseteq X := \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  ein Deformationsretrakt ist.

**Übungsaufgabe 4.9.** Das Möbiusband entsteht aus dem Rechteck  $R := [0, 1] \times [-1, 1]$  durch gegensinniges Zusammenkleben der gegenüberliegenden Kanten  $\{0\} \times [-1, 1]$  und  $\{1\} \times [-1, 1]$ . Wir können es als einen Quotientenraum  $M := R / \sim$  beschreiben. Die Äquivalenzrelation ist folgendermaßen gegeben:

$(x, y) \sim (x', y')$  genau dann, wenn eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:

- $(x, y) = (x', y')$ ,
  - $x \in \{0, 1\}$ ,  $(x', y') = (1 - x, -y)$ .
1. Zeige, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist.
  2. Sei  $I = [0, 1] \times \{0\}$  und  $g: I \rightarrow S^1$  die stetige Surjektion  $(x, 0) \mapsto \exp(2\pi i x)$ . Zeige, dass  $\bar{g}: I / \sim \rightarrow S^1$ ,  $[(x, 0)] \mapsto \exp(2\pi i x)$  wohldefiniert ist, d.h. für  $(x, 0) \sim (x', 0)$  gilt  $g((x, 0)) = g((x', 0))$ . Folgere, dass für die stetige Projektion  $p: I \rightarrow I / \sim$ ,  $(x, 0) \mapsto [(x, 0)]$  gilt:  $\bar{g} \circ p = g$ .
  3. Zeige, dass  $\bar{g}$  bijektiv ist und gib die Umkehrabbildung  $h$  an.

Wir versehen  $I / \sim$  mit der *Quotiententopologie*, d.h.  $U \subseteq I / \sim$  ist genau dann offen, wenn  $p^{-1}(U) \subseteq I$  offen ist.

4. Zeige, dass  $\bar{g}$  stetig ist.  
Auch  $h$  ist stetig. Den Beweis lassen wir hier aus. Damit ist  $\bar{g}: I / \sim \rightarrow S^1$  ein Homöomorphismus!
5. Zeige, dass  $I / \sim \subset M$  ein Deformationsretrakt ist.
6. Bestimme  $\pi_1(M, (1, 0))$ .
7. Betrachte die Schleife auf  $M$ , die ein Mal den Rand von  $M$  abläuft. Fasse diese Schleife als Schleife  $\gamma$  in  $S^1$  auf. Bestimme  $|w(\gamma, 0)| \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ . (Hier ist kein mathematischer Beweis notwendig. Eine kurze Erklärung genügt.)

**Übungsaufgabe 4.10.** Skizziere die Objekte und bestimme die Fundamentalgruppe am Punkt  $x = (1, 0, 0) \in X \subset Y$ :

- (1)  $X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [-1, 1]\}$ ,
- (2)  $Y = X \cup \{(x, y, \pm 1) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . (Hier genügt eine Erklärung ohne explizite Rechnung.)

**Übungsaufgabe 4.11.** Betrachte die allgemeine lineare Gruppe  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$  sowie die Determinantenabbildung  $\det: \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^\times$ . Die spezielle lineare Gruppe ist gegeben durch  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}) \mid \det(A) = 1\} = \ker(\det)$ . Diese ist nach Lemma 4.27 ein Normalteiler in  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ .

Zeige, dass  $\overline{\det}: \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^\times$ ,  $[A] \mapsto \det(A)$  ein Gruppenisomorphismus ist. Dabei ist  $[A] = \mathrm{ASL}_2(\mathbf{R}) = \{AB \mid B \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})\}$ . Zeige dazu die folgenden Beweisschritte:

- $\overline{\det}$  ist wohldefiniert, d.h. für  $A, A' \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$  mit  $[A] = [A']$  ist  $\overline{\det}([A]) = \overline{\det}([A'])$ .
- $\overline{\det}$  ist ein Gruppenhomomorphismus.
- $\overline{\det}$  ist surjektiv.
- $\ker(\overline{\det}) = \{e_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})} = [I_2]\}$  (siehe Übungsaufgaben 3.36 und 4.2).

**Übungsaufgabe 4.12.** 1. Es sei  $G$  eine abelsche Gruppe und  $N \subset G$  eine Untergruppe. Zeige, dass  $N$  ein Normalteiler in  $G$  ist.

Betrachte nun die Untergruppe  $(\mathbf{Z}, +) \subset (\mathbf{R}, +)$ . Wir schreiben  $[r] := r + \mathbf{Z} = \{r + z \mid z \in \mathbf{Z}\}$ . Die stetige Abbildung  $f: \mathbf{R} \rightarrow S^1$  sei gegeben durch  $r \mapsto \exp(2\pi i x)$  und  $p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  sei die surjektive kanonische Projektion  $r \mapsto [r]$ .

2. Zeige, dass  $\overline{f}: (\mathbf{R}/\mathbf{Z}, +) \rightarrow (S^1, \cdot)$ ,  $[r] \mapsto \exp(2\pi i r)$  ein Gruppenisomorphismus ist. Nutze dafür die Vorgehensweise aus Übungsaufgabe 4.11.

Wir versehen  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  mit der Quotiententopologie, d.h.  $U \subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  ist genau dann offen, wenn  $p^{-1}(U) \subset \mathbf{R}$  offen ist. Es ist  $f = \overline{f} \circ p$ .

3. Zeige, dass  $\overline{f}$  stetig ist.

4. Zeige folgendermaßen, dass  $f$  eine offene Abbildung ist, d.h. für jede offene Teilmenge  $U \subset \mathbf{R}$  ist  $f(U) \subset S^1$  offen:

- Zeige, dass  $f((a, b))$  für alle  $a \leq b \in \mathbf{R}$  offen in  $S^1$  ist. (Unterscheide  $|a - b| \geq 1$  und  $|a - b| < 1$ .)
- Fakt: Jede offene Teilmenge  $U \subset \mathbf{R}$  kann als abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen geschrieben werden, also  $U = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (a_n, b_n)$ .  
Folgere mithilfe des Faktes, dass  $f$  offen ist.

5. Zeige, dass auch  $\overline{f}$  offen ist. Folgere mithilfe von Bemerkung 2.33, dass  $\overline{f}$  ein Homöomorphismus ist.

**Übungsaufgabe 4.13.** Es sei  $n$  ungerade und  $I_n$  die Identitätsmatrix in  $\mathbf{R}^{n \times n}$ . Zeige, dass  $-I_n$  kein Kommutator in  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$  ist, d.h. es existieren keine Matrizen  $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$  mit  $[A, B] = -I_n$ .

**Übungsaufgabe 4.14.** Es sei  $G$  eine Gruppe,  $G' \subseteq G$  die Kommutatoruntergruppe sowie  $N \subseteq G$  eine weitere Untergruppe. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1)  $N$  ist ein Normalteiler in  $G$  und  $G/N$  ist abelsch.
- (2)  $G' \subseteq N$ .

# Literatur

- [CS66] W. G. Chinn und N. E. Steenrod. *First concepts of topology. The geometry of mappings of segments, curves, circles, and disks*. New Mathematical Library, Vol. 18. Random House, New York; The L. W. Singer Co., Syracuse, N.Y., 1966, S. viii+160.
- [Dei17] Anton Deitmar. *Analysis*. German. 2nd revised edition. Berlin: Springer, 2017, S. xii + 422. ISBN: 978-3-662-53351-2/pbk; 978-3-662-53352-9/ebook.
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 9780521795401. URL: <https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.
- [Jän05] Klaus Jänich. *Topologie*. Eighth. Springer-Verlag, Berlin, 2005, S. x+239. ISBN: 978-3-540-21393-2; 3-540-21393-7.
- [Que79] Boto von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. Second. Hochschultext. [University Text]. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979, S. x+209. ISBN: 3-540-09799-6.

